Compito di Analisi Matematica, Seconda parte, Tema X

1 febbraio 2019

COGNOME:	NOME:	MATR.:

Esercizio 1. Determinare al variare del parametro reale x il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\cos\Big(\frac{1}{n}\Big)-2^{\frac{1}{n}}\Big)(1-x)^n$$

Soluzione. Posto $a_n=\cos\left(\frac{1}{n}\right)-2^{\frac{1}{n}}$ e $y=1-x$, si deve studiare la serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty}a_ny^n$. Dato che $a_n<0$ si deve studiare (se esiste) $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{-a_n}$. Usando gli sviluppi per $x\to 0$

$$\cos(x)=1-\frac{x^2}{2}+o(x^2),\quad e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$$

ed il fatto che $2^x=e^{x\ln(2)}$, si ha $2^x=1+x\ln(2)+\frac{\ln(\,2)x^2}{2}+o(x^2)$. Si deduce

$$\cos\Big(\frac{1}{n}\Big)-2^{\frac{1}{n}}=1-\frac{1}{2n^2}+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)-\Big(1+\frac{\ln(2)}{n}+\frac{\ln^2(2)}{2n^2}+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big)$$

ossia

$$-a_n=\frac{\ln(2)}{n}+\frac{\ln^2(2)+1}{2n^2}+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)=\frac{\ln(2)}{n}(1+o(1)),$$

da cui $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{-a_n}=1$. La serie quindi converge assolutamente per $-1<1-x<1$, cioè $0<x<2$. Rimane da vedere cosa succede se $x=0$ e $x=2$. Se $x=0$ la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{+\infty}-\frac{\ln(2)}{n}(1+o(1))$$

che diverge a $-\infty$ per confronto con la serie armonica negativa di termine $-1/n$. Se $x=2$ la serie diventa, usando lo sviluppo di ordine 2 sopra

$$\sum_{n=1}^{+\infty}-\frac{\ln(2)}{n}(-1)^n-\Big(\frac{\ln^2(2)+1}{2n^2}+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big)(-1)^n.$$

Si può quindi vedere come la somma di due serie convergenti: la prima parte converge per il criterio di Leibniz, la seconda parte converge perché converge assolutamente per confronto con la serie armonica di termine $1/n^2$.

Istruzioni: Verranno corrette solo le risposte scritte su questo foglio. La soluzione di ogni esercizio deve essere giustificata con i passaggi fondamentali del procedimento e scritta nello spazio bianco sotto ad ogni esercizio.
Esercizio 2.

(1) Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale
$$y''(x) + 2y'(x) - 3y(x) = 4\sin(x).$$
(2) Determinare poi le soluzioni che hanno un minimo locale in $x = 0$.

Soluzione. (1) Si tratta di un'eq. dif. lineare a coefficienti costanti, la cui soluzione generale y è data da $v + y_p$ dove v soluzione dell'eq. omogenea associata e y_p soluzione particolare. Poiché $P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$ implica $\lambda = 1, -3$ si ha $v(x) = Ae^x + Be^{-3x}$, $A, B \in \mathbb{R}$. Dato che $\pm i$ non sono soluzione di $P = 0$, si cerca y_p della forma $C\cos(x) + D\sin(x)$. Risolvendo il sistema associato si ottiene $C = -2/5, D = -4/5$. La soluzione generale è quindi
$$y(x) = Ae^x + Be^{-3x} - \frac{2}{5}\cos(x) - \frac{4}{5}\sin(x),$$
al variare di $A, B \in \mathbb{R}$.
(2) Le condizioni necessarie su y per avere $x = 0$ punto di minimo locale sono $y'(0) = 0$ e $y''(0) \geq 0$. Le condizioni sufficienti invece sono $y'(0) = 0$ e $y''(0) > 0$. Rimangono incerti i punti in cui $y'(0) = y''(0) = 0$, in questo caso bisogna studiare le derivate successive. Questo si può fare facilmente riderivando l'eq. differenziale: risulta
$$y'''(x) + 2y''(x) - 3y'(x) = 4\cos(x)$$
che calcolata in $x = 0$ sotto la condizione $y'(0) = 0 = y''(0)$ fornisce $y'''(0) = 4$. Il fatto che la derivata terza sia diversa da zero assicura che $x = 0$ è un punto di flesso ma non di minimo locale). Si deduce che i coefficienti A, B corretti sono quelli che assicurano le condizioni $y'(0) = 0$ e $y''(0) > 0$.

Calcolando $y'(0) = 0$ si ottiene la condizione sui parametri A, B
$$(*) \qquad A - 3B - \frac{4}{5} = 0.$$
Senza bisogno di fare altre derivazioni dall'eq. diff. soddisfatta da y si deduce il valore di $y''(0)$:
$$0 = 4\sin(0) = -3y(0) + 2y'(0) + y''(0) = -3A - 3B + \frac{6}{5} + y''(0).$$
Imponendo $y''(0) > 0$ si ha $3A + 3B > 6/5$ ed usando $(*)$, si ottiene l'ulteriore condizione
$$(**) \qquad y''(0) = 4A - 2 > 0.$$
$(*)$ e $(**)$ sono verificate quindi se $A > 1/2$ e $B = A/3 - 4/15$.

Se ne deriva che $x = 0$ è un punto di minimo locale per y se e solo se $A > 1/2$ e $B = A/3 - 4/15$.

Esercizio 3. Per $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sia $f_{\alpha,\beta} : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{x^\alpha}{(\ln(x) + \ln(2))^\beta}.$$

a) Studiare il grafico di $f_{\alpha,\beta}$ per $\alpha = 1, \beta = 1$;

b) Dire per quali α, β esiste $\int_1^{+\infty} f_{\alpha,\beta}(x)\, dx$;

c) Dire per quali α, β esiste $\int_0^{1/2} f_{\alpha,\beta}(x)\, dx$.

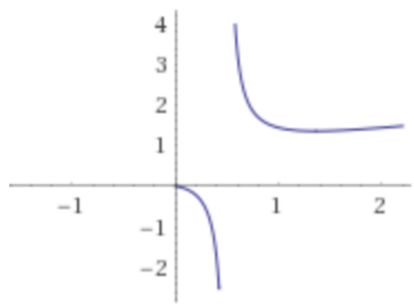
Soluzione. a) Si nota che $\ln(x) + \ln(2) = \ln(2x)$. La funzione è definita per $x > 0$ e $x \neq 1/2$. Si ha

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 1/2\pm} f(x) = \pm\infty.$$

Derivando si ha

$$f'(x) = \frac{\ln(2x) - 1}{\ln^2(2x)}$$

da cui si f decresce su $(0, 1/2)$ e su $(1/2, e/2)$ con minimo locale in $e/2$ e poi cresce su $(e/2, +\infty)$.



b) La funzione è positiva e integrabile su ogni sottointervallo finito. Si può fare il confronto su $(2, +\infty)$ con l'integrale della funzione armonica generalizzata $g(x) = x^\alpha/(\ln(x))^\beta$, infatti

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Visto che si è visto a lezione che l'integrale di $g(x)$ esiste finito se e solo se o $\alpha < -1$e $\beta \in \mathbb{R}$ oppure se $\alpha = -1$ e $\beta > 1$, l'integrale dato converge per gli stessi valori.

c) La funzione è positiva e integrabile su ogni sottointervallo finito di $(0, 1)$. Visto che in $x = 1/2$ il denominatore si annulla in $x = 1/2$ ci sono problemi solo per $\beta < 0$. Discutiamo quindi l'esistenza di $\int f$ su $(1/4, 1/2)$. Usando lo sviluppo di Taylor al primo ordine in $x = 1/2$ si ha

$$\ln(2x) = 2(x - 1/2) + o(x - 1/2).$$

L'integrale converge quindi solo se $\beta < 1$. Rimane da studiare l'integrabilità su $(0, 1/4)$. Il termine importante è x^α: se $\alpha > -1$ l'integrale converge per ogni β per confronto con x^γ con $\gamma \in (-1, \alpha)$. Se $\alpha < -1$ l'integrale diverge per ogni β per confronto con x^γ con $\gamma \in (\alpha, -1)$. Se $\alpha = -1$ l'integrale converge se e solo se $\beta > 1$ per integrazione diretta e cambio di variabile $y = \ln(x)$. Concludendo $\int_0^1 f dx$ esiste solo per $\alpha > -1$ e $\beta < 1$.

Compito di Analisi Matematica, Seconda parte, Tema Y

1 febbraio 2019

COGNOME:	NOME:	MATR.:

Esercizio 1. Determinare al variare del parametro reale x il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(1+\sin\Big(\frac{1}{n}\Big)-3^{\frac{1}{n}}\Big)(x-1)^n$$

Soluzione. Posto $a_n=\sin\left(\frac{1}{n}\right)-3^{\frac{1}{n}}$ e $y=x-1$, si deve studiare la serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n y^n$. Dato che $a_n<0$ si deve studiare (se esiste) $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{-a_n}$. Usando gli sviluppi per $x\to 0$

$$\sin(x)=x+o(x^2),\quad e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$$

ed il fatto che $3^x=e^{x\ln(3)}$, si ha $3^x=1+x\ln(3)+\frac{\ln^2(3)x^2}{2}+o(x^2)$. Si deduce

$$1+\sin\big(\frac{1}{n}\big)-2^{\frac{1}{n}}=1+\frac{1}{n}+o\big(\frac{1}{n^2}\big)-\big(1+\frac{\ln(3)}{n}+\frac{\ln^2(3)}{2n^2}+o\big(\frac{1}{n^2}\big)\big)$$

ossia

$$-a_n=\frac{\ln(3)-1}{n}+\frac{\ln^2(3)}{2n^2}+o\big(\frac{1}{n^2}\big)=\frac{\ln(3)-1}{n}(1+o(1)),$$

da cui $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{-a_n}=1$. La serie quindi converge assolutamente per $-1<x-1<1$, cioè $0<x<2$. Rimane da vedere cosa succede se $x=0$ e $x=2$. Se $x=2$ la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{+\infty}-\frac{\ln(3)-1}{n}(1+o(1))$$

che diverge a $-\infty$ per confronto con la serie armonica negativa di termine $-1/n$. Se $x=0$ la serie diventa, usando lo sviluppo di ordine 2 sopra

$$\sum_{n=1}^{+\infty}-\frac{\ln(3)-1}{n}(-1)^n-\Big(\frac{\ln^2(3)}{2n^2}+o\big(\frac{1}{n^2}\big)\Big)(-1)^n.$$

Si può quindi vedere come la somma di due serie convergenti: la prima parte converge per il criterio di Leibniz, la seconda parte converge perché converge assolutamente per confronto con la serie armonica di termine $1/n^2$.

Istruzioni: Verranno corrette solo le risposte scritte su questo foglio. La soluzione di ogni esercizio deve essere giustificata con i passaggi fondamentali del procedimento e scritta nello spazio bianco sotto ad ogni esercizio.
Esercizio 2.

(1) Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y''(x) + 2y'(x) - 3y(x) = -\cos(x).$$

(2) Determinare poi le soluzioni che hanno un massimo locale in $x = 0$.

Soluzione. (1) Si tratta di un'eq. dif. lineare a coefficienti costanti, la cui soluzione generale y è data da $v + y_p$ dove v soluzione dell'eq. omogenea associata e y_p soluzione particolare. Poiché $P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$ implica $\lambda = 1, -3$ si ha $v(x) = Ae^x + Be^{-3x}$, $A, B \in \mathbb{R}$. Dato che $\pm i$ non sono soluzione di $P = 0$, si cerca y_p della forma $C\cos(x) + D\sin(x)$. Risolvendo il sistema associato si ottiene $C = -2/5, D = -4/5$. La soluzione generale è quindi

$$y(x) = Ae^x + Be^{-3x} + \frac{1}{5}\cos(x) - \frac{1}{10}\sin(x),$$

al variare di $A, B \in \mathbb{R}$.

(2) Le condizioni necessarie su y per avere $x = 0$ punto di massimo locale sono $y'(0) = 0$ e $y''(0) \leq 0$. Le condizioni sufficienti invece sono $y'(0) = 0$ e $y''(0) < 0$. Rimangono incerti i punti in cui $y'(0) = y''(0) = 0$, in questo caso bisogna studiare le derivate successive. Questo si può fare facilmente riderivando l'eq. differenziale: risulta

$$y'''(x) + 2y''(x) - 3y'(x) = \sin(x)$$

che calcolata in $x = 0$ sotto la condizione $y'(0) = 0 = y''(0)$ fornisce $y'''(0) = 0$. Riderivando si calcola poi $y''''(x) + 2y'''(x) - 3y''(x) = \cos(x)$ e $y''''(0) = 1$. Il fatto che la derivata quarta sia positiva assicura che $x = 0$ è un punto di minimo locale. Si deduce che i coefficienti A, B corretti sono quelli che assicurano le condizioni $y'(0) = 0$ e $y''(0) < 0$.

Calcolando $y'(0) = 0$ si ottiene la condizione sui parametri A, B

$$(*) \qquad A - 3B - \frac{1}{10} = 0.$$

Senza bisogno di fare altre derivazioni dall'eq. diff. soddisfatta da y si deduce il valore di $y''(0)$:

$$-1 = -\cos(0) = -3y(0) + 2y'(0) + y''(0) = -3A - 3B - \frac{3}{5} + y''(0).$$

Imponendo $y''(0) < 0$ si ha $3A + 3B < 2/5$ ed usando $(*)$, si ottiene l'ulteriore condizione

$$(**) \qquad y''(0) = 4A - 1/2 < 0.$$

$(*)$ e $(**)$ sono verificate quindi se $A < 1/8$ e $B = A/3 - 1/30$.

Se ne deriva che $x = 0$ è un punto di massimo locale per y se e solo se $A < 1/8$ e $B = A/3 - 1/30$.

Esercizio 3. Per $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sia $f_{\alpha,\beta} : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{x^\alpha (\ln(x) + \ln(2))^\beta}.$$

a) Studiare il grafico di $f_{\alpha,\beta}$ per $\alpha = 1, \beta = 1$;
b) Dire per quali α, β esiste $\int_1^{+\infty} f_{\alpha,\beta}(x)\, dx$;
c) Dire per quali α, β esiste $\int_0^{1/2} f_{\alpha,\beta}(x)\, dx$.

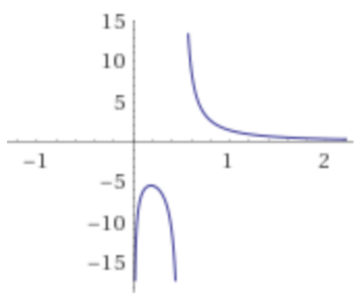
Soluzione. a) Si nota che $\ln(x) + \ln(2) = \ln(2x)$. La funzione è definita per $x > 0$ e $x \neq 1/2$. Si ha

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to 1/2\pm} f(x) = \pm\infty.$$

Derivando si ha

$$f'(x) = -\frac{\ln(2x) + 1}{x^2 \ln^2(2x)}$$

da cui si deduce che f è crescente su $(0, 1/2e)$ e decrescente su $(1/2e, 1/2)$ con massimo locale in $1/2e$ e decrescente su $(1/2, +\infty)$.



b) La funzione è positiva e integrabile su ogni sottointervallo finito. Si può fare il confronto su $(2, +\infty)$ con l'integrale della funzione armonica generalizzata $g(x) = 1/x^\alpha (\ln(x))^\beta$, infatti

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Dato che si è visto a lezione che l'integrale di $g(x)$ esiste finito se e solo se o $\alpha > 1$ e $\beta \in \mathbb{R}$ oppure se $\alpha = 1$ e $\beta > 1$, l'integrale dato converge per gli stessi valori.
c) La funzione è positiva e integrabile su ogni sottointervallo finito di $(0, 1)$. Visto che in $x = 1/2$ il denominatore si annulla in $x = 1/2$ ci sono problemi solo per $\beta < 0$. Discutiamo quindi l'esistenza di $\int f$ su $(1/4, 1/2)$. Usando lo sviluppo di Taylor al primo ordine in $x = 1/2$ si ha

$$\ln(2x) = 2(x - 1/2) + o(x - 1/2).$$

L'integrale converge quindi solo se $\beta < 1$. Rimane da studiare l'integrabilità su $(0, 1/4)$. Il termine importante è $1/x^\alpha$: se $\alpha < 1$ l'integrale converge per ogni β per confronto con $1/x^\gamma$ con $\gamma \in (\alpha, 1)$. Se $\alpha > 1$ l'integrale diverge per ogni β per confronto con $1/x^\gamma$ con $\gamma \in (1, \alpha)$. Se $\alpha = 1$ l'integrale converge se e solo se $\beta > 1$ per integrazione diretta e cambio di variabile $y = \ln(x)$. Concludendo $\int_0^1 f dx$ esiste solo per $\alpha < 1$ e $\beta < 1$.

Compito di Analisi Matematica, Seconda parte, Tema Z

1 febbraio 2019

COGNOME:	NOME:	MATR.:

Esercizio 1. Determinare al variare del parametro reale x il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\cos\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big) - 2^{\frac{1}{n}} \Big)(2x+1)^n$$

Soluzione. Posto $a_n = \cos\left(\frac{1}{n}\right) - 2^{\frac{1}{n}}$ e $y = 2x+1$, si deve studiare la serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n y^n$. Dato che $a_n < 0$ si deve studiare (se esiste) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{-a_n}$. Usando gli sviluppi per $x \to 0$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4), \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

ed il fatto che $2^x = e^{x\ln(2)}$, si ha $2^x = 1 + x\ln(2) + \frac{\ln(\,2)x^2}{2} + o(x^2)$. Si deduce

$$\cos\big(\frac{1}{\sqrt{n}}\big) - 2^{\frac{1}{n}} = 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{24n^2} + o\big(\frac{1}{n^2}\big) - \big(1 + \frac{\ln(2)}{n} + \frac{\ln^2(2)}{2n^2} + o\big(\frac{1}{n^2}\big)\big)$$

ossia

$$-a_n = \frac{\ln(2)+2}{2n} + \frac{12\ln^2(2)+1}{24n^2} + o\big(\frac{1}{n^2}\big) = \frac{\ln(2)}{n}(1+o(1)),$$

da cui $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{-a_n} = 1$. La serie quindi converge assolutamente per $-1 < 2x+1 < 1$, cioè $-1 < x < 0$. Rimane da vedere cosa succede se $x = 0$ e $x = -1$. Se $x = -1$ la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{\ln(2)+2}{2n}(1+o(1))$$

che diverge a $-\infty$ per confronto con la serie armonica negativa di termine $-1/n$. Se $x = 0$ la serie diventa, usando lo sviluppo di ordine 2 sopra

$$\sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{\ln(2)+2}{2n}(-1)^n - \Big(\frac{12\ln^2(2)+1}{24n^2} + o\big(\frac{1}{n^2}\big)\Big)(-1)^n.$$

Si può quindi vedere come la somma di due serie convergenti: la prima parte converge per il criterio di Leibniz, la seconda parte converge perché converge assolutamente per confronto con la serie armonica di termine $1/n^2$.

Istruzioni: Verranno corrette solo le risposte scritte su questo foglio. La soluzione di ogni esercizio deve essere giustificata con i passaggi fondamentali del procedimento e scritta nello spazio bianco sotto ad ogni esercizio.
Esercizio 2.

(1) Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y''(x) - 2y'(x) + 3y(x) = \cos(x).$$

(2) Determinare poi le soluzioni che hanno un minimo locale in $x = 0$.

Soluzione. (1) Si tratta di un'eq. dif. lineare a coefficienti costanti, la cui soluzione generale y è data da $v + y_p$ dove v soluzione dell'eq. omogenea associata e y_p soluzione particolare. Poiché $P(\lambda) = \lambda^2+2\lambda-3 = 0$ implica $\lambda = 1\pm\sqrt{2}i$ si ha $v(x) = Ae^x \cos(\sqrt{2}x)+ Be^x \sin(\sqrt{2}x)$, $A, B \in \mathbb{R}$. Dato che $\pm i$ non sono soluzione di $P = 0$, si cerca y_p della forma $C \cos(x) + D \sin(x)$. Risolvendo il sistema associato si ottiene $C = -2/5, D = -4/5$. La soluzione generale è quindi

$$y(x) = Ae^x \cos(\sqrt{2}x) + Be^x \sin(\sqrt{2}x) + \frac{1}{4}\cos(x) - \frac{1}{4}\sin(x),$$

al variare di $A, B \in \mathbb{R}$.
(2) Le condizioni necessarie su y per avere $x = 0$ punto di minimo locale sono $y'(0) = 0$ e $y''(0) \geq 0$. Le condizioni sufficienti invece sono $y'(0) = 0$ e $y''(0) > 0$. Rimangono incerti i punti in cui $y'(0) = y''(0) = 0$, in questo caso bisogna studiare le derivate successive. Questo si può fare facilmente riderivando l'eq. differenziale: risulta

$$y'''(x) + 2y''(x) - 3y'(x) = -\sin(x)$$

che calcolata in $x = 0$ sotto la condizione $y'(0) = 0 = y''(0)$ fornisce $y'''(0) = 0$. Riderivando si ha poi $y''''(x) + 2y'''(x) - 3y''(x) = -\cos(x)$ da cui $y''''(0) = -1$, ossia $x = 0$ è un punto di massimo locale. Si deduce che i coefficienti A, B corretti sono quelli che assicurano le condizioni $y'(0) = 0$ e $y''(0) > 0$.

Calcolando $y'(0) = 0$ si ottiene la condizione sui parametri A, B

$$(*) \qquad A + \sqrt{2}B - \frac{1}{4} = 0.$$

Senza bisogno di fare altre derivazioni dall'eq. diff. soddisfatta da y si deduce il valore di $y''(0)$:

$$4 = 4\cos(0) = -3y(0) + 2y'(0) + y''(0) = -3A - \frac{3}{4} + y''(0).$$

Imponendo $y''(0) > 0$ si ha $A > -19/12$ e l'ulteriore condizione $B = (1/4 - A)/\sqrt{2}$.

Se ne deriva che $x = 0$ è un punto di minimo locale per y se e solo se $A > -19/12$ e $B = (1/4 - A)/\sqrt{2}$.

Esercizio 3. Per $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sia $f_{\alpha,\beta} : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{x^\alpha}{(\ln(x) + \ln(3))^\beta}.$$

a) Studiare il grafico di $f_{\alpha,\beta}$ per $\alpha = 1, \beta = 1$;
b) Dire per quali α, β esiste $\int_1^{+\infty} f_{\alpha,\beta}(x)\, dx$;
c) Dire per quali α, β esiste $\int_0^{1/3} f_{\alpha,\beta}(x)\, dx$.

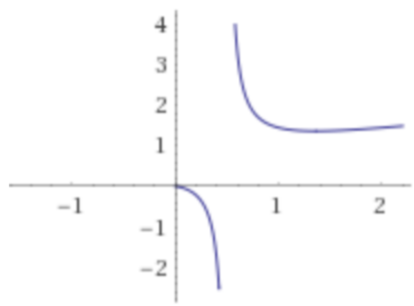
Soluzione. a) Si nota che $\ln(x) + \ln(3) = \ln(3x)$. La funzione è definita per $x > 0$ e $x \neq 1/3$. Si ha

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 1/3\pm} f(x) = \pm\infty.$$

Derivando si ha

$$f'(x) = \frac{\ln(3x) - 1}{\ln^2(3x)}$$

da cui f decresce su $(0, 1/3)$ e su $(1/3, e/3)$ con minimo locale in $e/3$ e poi cresce su $(e/3, +\infty)$.



b) La funzione è positiva e integrabile su ogni sottointervallo finito. Si può fare il confronto su $(2, +\infty)$ con l'integrale della funzione armonica generalizzata $g(x) = x^\alpha/(\ln(x))^\beta$, infatti

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Visto che si è visto a lezione che l'integrale di $g(x)$ esiste finito se e solo se o $\alpha < -1$e $\beta \in \mathbb{R}$ oppure se $\alpha = -1$ e $\beta > 1$, l'integrale dato converge per gli stessi valori.
c) La funzione è positiva e integrabile su ogni sottointervallo finito di $(0, 1)$. Visto che in $x = 1/3$ il denominatore si annulla in $x = 1/3$ ci sono problemi solo per $\beta < 0$. Discutiamo quindi l'esistenza di $\int f$ su $(1/6, 1/3)$. Usando lo sviluppo di Taylor al primo ordine in $x = 1/3$ si ha

$$\ln(3x) = 3(x - 1/3) + o(x - 1/3).$$

L'integrale converge quindi solo se $\beta < 1$. Rimane da studiare l'integrabilità su $(0, 1/6)$. Il termine importante è x^α: se $\alpha > -1$ l'integrale converge per ogni β per confronto con x^γ con $\gamma \in (-1, \alpha)$. Se $\alpha < -1$ l'integrale diverge per ogni β per confronto con x^γ con $\gamma \in (\alpha, -1)$. Se $\alpha = -1$ l'integrale converge se e solo se $\beta > 1$ per integrazione diretta e cambio di variabile $y = \ln(x)$. Concludendo $\int_0^1 f dx$ esiste solo per $\alpha > -1$ e $\beta < 1$.