Compito di Istituzioni di Matematica, Seconda parte

29 novembre 2018

COGNOME:	NOME:	MATR.:

Esercizio 1. Determinare le soluzioni complesse dell'equazione

$$|z|^2 - 2iz = (1-i)\bar{z} + 2(3+i).$$

Determinare poi le radici terze complesse di ogni soluzione trovata e scriverle sia in forma algebrica che trigonometrico/esponenziale.

Soluzione.
Usiamo la forma algebrica $z = a+ib$ e determiniamo le due equazioni risolte dai coefficienti reali a, b. Si ha $(1-i)\bar{z} = (1-i)(a-ib) = a - ia - ib - b^2$ e

$$|z|^2 - 2iz = a^2 + b^2 - 2ia + 2b = (1-i)\bar{z} + 2(3+i) = a - ia - ib - b + 6 + 2i$$

da cui

$$a^2 + b^2 + 2b = a - b + 6, \quad -2ia = -ia - ib + 2i.$$

La seconda equazione si riscrive come $a - b + 2 = 0$, cioè $b = a + 2$ e sostituendo nella prima equazione si ha

$$a^2 + (a+2)^2 + 2a + 4 = 4$$

da cui $2a^2 + 6a + 4 = 0$ e risulta $a = -1$ oppure $a = -2$. Le soluzioni sono quindi $z_1 = -1 + i$ e $z_2 = -2$.

Le radici terze si possono calcolare facilmente scrivendo le soluzioni in forma esponenziale $z_1 = \sqrt{2}e^{i3\pi/4}$, $z_2 = 2e^{i\pi}$. Risultano quindi

$$\sqrt[3]{z_1}_{\mathbb{C}} = \{\sqrt[6]{2}e^{i\pi/4}, \sqrt[6]{2}e^{i7\pi/12}, \sqrt[6]{2}e^{i11\pi/12}\}$$

$$\sqrt[3]{z_2}_{\mathbb{C}} = \{\sqrt[3]{2}e^{i\pi/3}, \sqrt[3]{2}e^{i\pi}, \sqrt[3]{2}e^{i5\pi/3}\}.$$

In forma algebrica

$$\sqrt[3]{z_1}_{\mathbb{C}} = \left\{\sqrt[6]{2}\frac{(1+i)}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt[6]{2}}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right), \frac{\sqrt[6]{2}}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\right\}$$

$$\sqrt[3]{z_2}_{\mathbb{C}} = \left\{\sqrt[3]{2}\Big(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}\Big), -\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}\Big(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}\Big)\right\}.$$

Esercizio 2.

Data la funzione $f(x) = \ln(x^2 - x^3)$

1. determinarne il dominio ed estremo superiore ed inferiore;
2. determinare le zone in cui f è crescente/decrescente e convessa/concava;
3. calcolare $\displaystyle\int_{-2}^{-1} f(x)\,dx$;
4. determinare, se esiste, il valore $\displaystyle\int_{-2}^{0} f(x)\,dx$.

Soluzione. 1. La funzione è ben definita per $x^2 - x^3 = x^2(1-x) > 0$ vale a dire $x \neq 0$ e $x < 1$. Il suo dominio è quindi $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$.
I limiti agli estremi del dominio valgono $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 1-} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \infty$, per cui $\sup f = +\infty$, e $\inf f = \infty$.

2. La funzione è derivabile infinite volte sul suo dominio e si ha

$$f'(x) = \frac{2x - 3x^2}{x^2 - x^3} = \frac{2 - 3x}{x - x^2}, \quad f''(x) = \frac{-3x^2 + 4x - 2}{x^2(1-x)^2},$$

da cui si deduce che f è decrescente e concava su $(-\infty, 0)$, crescente su $(0, 2/3)$, decrescente su $(2/3, 1)$ (ha quindi un massimo locale in $x = 2/3$) e concava su $(0, 1)$.

3. Integrando per parti si ha

$$\int (\ln(x^2 - x^3)\,dx = x\ln(x^2 - x^3) - \int \frac{2 - 3x}{1 - x}\,dx = x\ln(x^2 - x^3) - 3x - \ln(1 - x) + c$$

da cui l'integrale cercato vale $\ln(108) - 3$.

4. Si deve valutare se esiste il limite $\lim_{b\to 0-} \displaystyle\int_{-2}^{b} f(x)\,dx$ e se questo limite è finito. Usando il fatto che $\ln(x^2 - x^3) = \ln(x^2) + \ln(1 - x)$ e la primitiva trovata sopra si ha

$$\lim_{b\to 0-} \int_{-2}^{b} f(x)\,dx = \lim_{b\to 0-} (b\ln(b^2 - b^3) - 3b - \ln(1 - b) + 2\ln(12) - 6 + \ln(3)) =$$

$$\lim_{b\to 0-} (b\ln(b^2) - 3b - (b - 1)\ln(1 - b) + 2\ln(4) - 6 + 3\ln(3)) = \ln(216) - 6$$

Esercizio 3. Al variare di $t \in \mathbb{R}$ si consideri l'applicazione lineare f_t associata alla matrice A_t definita da

$$\begin{pmatrix} t+1 & 2t & 1 \\ -5 & 1 & t+4 \\ 2 & -7 & -9 \end{pmatrix}.$$

a) Trovare i valori di t, per cui l'applicazione f_t non è iniettiva;
b) sia t_0 il più piccolo valore di t trovato al punto precedente; trovare una base di $\ker f_{t_0}$, ovvero del ker di f_t per $t = t_0$;
c) sia $t_1 = 26/11$; trovare una base dell'immagine di f_{t_1}, ovvero di f_t per $t = t_1$;
d) stabilire per quali valori di t il vettore $v = (2, 6, -9)$ appartiene all'immagine di T.

Soluzione:

a) Il determinante della matrice A è $11t^2 - 48t + 52$ che ha come radici $t_0 = 2$, $t_1 = \frac{26}{11}$. Dunque questi sono i valori per cui f_t non è iniettiva.
b) Per $t = 2$ la matrice A_t diventa

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -5 & 1 & 6 \\ 2 & -7 & -9 \end{pmatrix}.$$

Le prime due colonne sono linearmente indipendenti. Detti v_1, v_2, v_3 i corrispondenti vettori, cerchiamo di esprimere v_3 come combinazione lineare di v_1 e v_2. Possiamo limitarci a risolvere il sistema considerando solo le prime due coordinate, in quanto la matrice A_2 a rango 2 e il minore 2×2 in alto a sinistra a rango 2. Il sistema

$$\begin{cases} 3a + 4b = 1 \\ -5a + b = 6 \end{cases}$$

ha come soluzione $a = -1, b = 1$, dunque $-v_1 + v_2 = v_3$. Quindi un vettore nel nucleo di A_2 è $(-1, 1, -1)$. Poiché la matrice ha rango 2, la dimensione del nucleo è 1 e quindi il vettore trovato ne forma una base.
c) Per $t = \frac{26}{11}$ il calcolo del punto a) ci dice che la matrice A_t ha rango minore di 3. In particolare la matrice è

$$\begin{pmatrix} \frac{37}{11} & \frac{52}{11} & 1 \\ -5 & 1 & \frac{70}{11} \\ 2 & -7 & -9 \end{pmatrix}.$$

Le prime due colonne sono linearmente indipendenti, quindi il rango di A_t è 2 e le prime due colonne generano la sua imagine e ne sono una base.
d) Per $t \neq 2, \frac{26}{11}$ la matrice A_t ha rango 3, quindi il vettore v è contenuto nella sua immagine. Per $t = 2$ la differenza tra v e l'ultima colonna di A_t è il vettore $(1, 0, 0)$. Il determinante di

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -5 & 1 & 0 \\ 2 & -7 & 0 \end{pmatrix}.$$

è diverso da 0, quindi il vettore v non appartiene all'immagine. Per $t = \frac{26}{11}$ consideriamo la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{37}{11} & \frac{52}{11} & 2 \\ -5 & 1 & 6 \\ 2 & -7 & -9 \end{pmatrix}.$$

Sommando alla terza colonna la prima meno l'opposto della seconda otteniamo

$$\begin{pmatrix} \frac{37}{11} & \frac{52}{11} & \frac{22+37-52}{11} \\ -5 & 1 & 0 \\ 2 & -7 & 0 \end{pmatrix}.$$

e poiché il valore in alto a destra è diverso da 0 la matrice ha determinante non nullo. Quindi anche in questo caso v non appartiene all'immagine di f_t, che è generata dalle prime due colonne di A_t.