Compito di Istituzioni di Matematica, Seconda parte

18 luglio 2018

COGNOME:	NOME:	MATR.:

Esercizio 1. Determinare la soluzione dell'equazione differenziale $4\sqrt{x^3}yy' + y^2 - 1 = 0$ con condizionale iniziale $y(1) = -2$.

Soluzione. Visto che il punto iniziale $x_0 = 1$ è diverso da zero ed il valore iniziale $y_0 = -2$ è diverso da ± 1 si può dividere l'equazione per $1 - y^2$ e per $\sqrt{x^3}$ e limitarsi a risolvere l'equazione differenziale sopra nella forma

$$\frac{y}{1 - y^2}y' = \frac{1}{4\sqrt{x^3}}.$$

E' una equazione a variabili separabili per cui si cercano le primitive delle funzioni $t/(1-t^2)$ e $t^{-3/2}$. Si ottiene che la soluzione $y(x)$ soddisfa l'equazione

$$-\frac{1}{2}\ln(|1 - y^2(x)|) = -\frac{1}{2\sqrt{x}} + c$$

per una qualche costante $c \in \mathbb{R}$. Poiché $y(1) = -2$ si ha che in $x = 1$ il termine $1 - y^2(x)$ è negativo per cui ci si può liberare del valore assoluto, calcolare il valore della costante c dall'identitá $\ln(3) = 1 - 2c$ ed ottenere

$$\ln(y^2(x) - 1) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \ln(3) - 1$$

da cui

$$y^2(x) = 1 + e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}e^{\ln(3)-1} = 1 + 3e^{\frac{1}{\sqrt{x}}-1}$$

e

$$y(x) = -\sqrt{1 + 3e^{\frac{1}{\sqrt{x}}-1}}.$$

La scelta della soluzione con il meno davanti alla radice è determinata dal valore iniziale (anche $\tilde{y}(x) = \sqrt{1 + 3e^{\frac{1}{\sqrt{x}}-1}}$ è soluzione dell'equazione differenziale ma non rispetta il valore iniziale assegnato $y(1) = -2$).

Esercizio 2. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si consideri l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita da

$$T(x_1, x_2, x_3) = (3x_1+(k+1)x_2+4x_3, 3x_1+(-k+5)x_2+(4+2k)x_3, x_1+x_2+(3-k)x_3, 3kx_3).$$

a) Scrivere la matrice associata a T e trovare al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ la dimensione del nucleo e dell'immagine di T;
b) dire per quali valori di k l'applicazione T è suriettiva;
c) sia k_0 il valore di k tale che T non è iniettiva, determinare una base del nucleo di T e una base dell'immagine di T per $k = k_0$;
d) stabilire per quali k il vettore $v = (1, -1, 3, -3)$ appartiene all'immagine di T.

Soluzione.

a) La matrice associata a T è

$$\begin{pmatrix} 3 & (k+1) & 4 \\ 3 & (-k+5) & (4+2k) \\ 1 & 1 & (3-k) \\ 0 & 0 & 3k \end{pmatrix}.$$

Il minore dato dalle prime tre righe ha determinante $8k^2 - 26k + 20$ e si annulla per $k = \frac{5}{4}, 2$. Il minore dato dalla prima, seconda e quarta riga ha determinante $18k^2 - 36k$, che si annulla per $k = 0, 2$. Per il teorema della dimensione per $k \neq 2$ la matrice ha sicuramente rango 3. Per $k = 2$ la matrice diventa

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

ed ha chiaramente rango 2 perchè la prima e la seconda colonna sono uguali, mentre la terza è indipendente dalle prime due.

Dunque per $k = 2$ la dimensione dell'immagine di T è 2 e per il teorema della dimensione abbiamo che la dimensione del nucleo di T è $3 - 2 = 1$. In particolare per $k = 2$ l'applicazione T non è iniettiva.

Per $k \neq 2$ la matrice ha rango 3, da cui si deduce che la dimensione dell'immagine di T è 3 e (per il teorema della dimensione) la dimensione del nucleo è $3 - 3 = 0$. In particolare per $k \neq 2$ l'applicazione T è iniettiva.

b) L'applicazione lineare T va da $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^4$. Per il teorema della dimensione la dimensione dell'immagine è al massimo 3 per cui l'immagine non può mai essere tutto lo spazio $\mathbb{R}^4$, ossia l'applicazione T non può mai essere suriettiva.

c) Per quanto visto nel punto a) abbiamo che $k_0 = 2$. In questo caso il nucleo di T ha dimensione 1 e notando che le prime due colonne della matrice sono uguali vediamo che il vettore $(1, -1, 0)$ appartiene al nucleo. Dunque una base di $\ker T$ è

$$\{(1, -1, 0)\}.$$

L'immagine di T è generata dalle colonne della matrice associata, quindi per $k = 2$ l'immagine ha come base

$$\{(3,3,1,0),(4,8,1,6)\}$$

d) Consideriamo la matrice completa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & \text{(k+1)} & 4 & 1 \\ 3 & \text{(-k+5)} & \text{(4+2k)} & \text{-1} \\ 1 & 1 & \text{(3-k)} & 3 \\ 0 & 0 & \text{3k} & \text{-3} \end{array}\right).$$

e studiamone il rango. Notiamo che il determinante è $30k^2 - 30k - 60$ e si annulla per $k = 2, -1$. Inoltre per $k = 2$ abbiamo che il rango di

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 8 & \text{-1} \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & \text{-3} \end{array}\right).$$

è 3. Infatti il determinante del minore con le colonne $2,3,4$ e le righe $2,3,4$ è 30. Quindi abbiamo che il rango della matrice incompleta è uguale al rango della matrice completa solo per $k = -1$ e di conseguenza per il teorema di Rouché-Capelli il vettore $(1,-1,3,-3)$ appartiene all'immagine di T solo per $k = -1$.

Esercizio 3. Data
$$f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$$
determinarne una primitiva e calcolare l'area compresa tra il grafico di f nell'intervallo $[2,4]$ e l'asse delle x.

Soluzione. La funzione è ben definita e continua in ogni intervallo chiuso e limitato contenuto nel suo dominio $(0,+\infty)$ per cui ammette una (famiglia di) primitiva indicata come integrale indefinito $F = \int f\,dx$. Per calcolarla facciamo il cambio di variabile $\sqrt{x} = z$
$$\int f(x)\,dx = \int \frac{z^2-2}{z(z+1)} 2z\,dz.$$
Dall'identità $z^2 - 2 = z^2 + z - z - 1 - 1$ segue
$$\int \frac{z^2-2}{z(z+1)} 2z\,dz = \int \left(2z - 2 - \frac{2}{(z+1)}\right) dz = z^2 - 2z - 2\ln(|z+1|) + c.$$
Contando che $x = z^2$ si ha
$$\int f(x)\,dx = x - 2\sqrt{x} - 2\ln(\sqrt{x}+1) + c.$$
Rimane da calcolare l'area cercata e poichè f è positiva su $[2,4]$ il valore dell'area è uguale a
$$\int_2^4 f(x)\,dx = 2(\ln(\sqrt{2}+1) - \ln(3) + \sqrt{2} - 1).$$

Esercizio 4. Trovare le soluzioni complesse dell'equazione $z^3 - |z^3 + i| + 2 - 3i = 0$.
Soluzione. Poniamo $w = z^3$ e risolviamo

$$w - |w + i| + 2 - 3i = 0.$$

Ponendo $w = a+ib$, con $a, b \in \mathbb{R}$ ed eguagliando parte reale e parte immaginaria abbiamo

$$\begin{cases} a + 2 = \sqrt{a^2 + (b+1)^2} \\ b = 3. \end{cases}$$

tenendo che $b = 3$ e, sostituendo ed elevando al quadrato la prima equazione, otteniamo:

$$a^2 + 4a + 4 = a^2 + 16$$

da cui $a = 3$ e $w = 3 + 3i = 3\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})$. Si ottiene subito che $|w| = 3\sqrt{2} = |z^3|$ e $\arg w = \frac{\pi}{4}$.

Vale quindi che $|z| = \sqrt[3]{3\sqrt{2}}$ e, posto $\theta = \arg z$, vale

$$3\theta + 2k\pi = \frac{\pi}{4}$$

con $k = 0, 1, 2$, da cui

$$\theta = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}.$$

Ricordiamo che $\frac{1}{12} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ e quindi

$$\theta = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3} = \frac{3\pi}{4} + \frac{2k'\pi}{3}.$$

per $k' = k - 1 = 0, 1, 2$. Sostituendo abbiamo le tre soluzioni $z =$

$$\sqrt[3]{\frac{3}{2}}(-1+i); \qquad \sqrt[3]{\frac{3}{2}}(-1+i)\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \qquad \sqrt[3]{\frac{3}{2}}(-1+i)\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2.$$