Soluzioni di Limiti e continuità di funzioni.

1) Facendo i limiti a destra e sinistra dei punti $\{1,4\}$ si verifica che f è continua su tutto $\mathbb{R}$. Si verifica a mano che f è strettamente crescente per cui è iniettiva e dal fatto che f è continua e si ha $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ si deduce che f è anche surgettiva. f è quindi invertibile e $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è la funzione definita come segue:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x < 1 \\ \sqrt{x} & \text{se } 1 \leq x \leq 16 \\ \dfrac{x^2}{64} & \text{se } x > 4 \end{cases}$$

2)

$a)$ f è prolungabile con continuità su $\mathbb{R}$ ponendo $f(0) = 0$;
$b)$ g è prolungabile con continuità su $\mathbb{R}$ ponendo $g(0) = 0$;
$c)$ si ha $h(x) = \dfrac{-1}{1+x}$ per cui h non è prolungabile con continuità su $\mathbb{R}$;
$d)$ ϕ è prolungabile con continuità su $\mathbb{R}$ ponendo $\phi(0) = 0$.

3) I limiti possono essere calcolati usando solo i limiti notevoli (e non Taylor o l'Hopital), con il cambio di variabile ($x = x - \pi + \pi, x = x - 2 + 2$) e razionalizzando.

$$a)\,2\,;\ b)\,2\,;\ c)\,5\,;\ d)\ -1/2\,;\ e)\ \text{non esiste}\ ;\ f)\ -\infty\,;\ g)\,1\,;\ h)\ -1/2\,.$$

4) Esempi

– $f(x) = -3x$ per $x \geq 0$ ed $f(x) = -10$ per $x < 0$;
– $f(x) = 1/(x-e)$ per $x < e$, $f(x) = \log((ex)/(x - e + e^2))$ per $x \geq e$;
– $f(x) = -2x$ per $x < 0$, $f(x) = \sin(x)$ per $0 \leq x \leq 3\pi$, $f(x) = 0$ per $x > 3\pi$;
– $\sin(x)$;
– $x\sin(x)$.