Prima prova in Itinere Ist. Mat. 1, Seconda parte, Tema XY

22 maggio 2018

COGNOME:	NOME:	MATR.:

Esercizio 1. Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathcal{M}(2\times 2;\mathbb{R})$ definiti da

$$U=\left\{\begin{pmatrix} a & 0\\ c & d\end{pmatrix}\middle|\, a,c,d\in\mathbb{R}\right\},\quad V=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\middle|\, a+b-c=0\right\}.$$

(1) Determinare una base di U e di V, rispettivamente.
(2) Determinare la dimensione di $U\cap V$.
(3) Si definisca

$$W=\{A\in\mathcal{M}(2\times 2;\mathbb{R})|A=A_1+A_2 \text{ al variare di } A_1\in U \text{ e di } A_2\in V\}.$$

Dimostrare che W è un sottospazio e determinarne una base.

Soluzioni. (1) Il primo sottoinsieme, per sua definizione, è generato dalle matrici

$$E_1=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, E_2=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, E_3=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Esse sono anche una base perchè se si impone $\lambda_1E_1+\lambda_2E_2+\lambda_3E_3=O$ dove O è la matrice 2×2 a coefficienti $a_{i,j}$ tutti nulli si vede subito che deve essere $\lambda_1=a_{11}=0,\lambda_2=a_{21}=0,\lambda_3=a_{22}=0$. Analogamente, imponendo la condizione $a+b=c$, le matrici A appartenenti a V sono identificate da essere della forma

$$A=\begin{pmatrix} a & b\\ a+b & d\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Ossia le 3 matrici sopra sono generatori e sono anche linearmente indipendenti perche' se imponiamo che la loro combinazione lineare sopra, a coefficienti a,b,d sia la matrice nulla otteniamo le condizioni $a=0,b=0,d=0,a+b=0$ che hanno solo la soluzione $a=b=d=0$.

(2) Linsieme $U\cap V$ è identificato dalle matrici $\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ i cui coefficineti a,b,c,d verificano sia le condizioni imposte per stare in U, cioè $b=0$, e quelle per stare in V, cioè $a+b=c$, si ottiene quindi che un elemento generico di $U\cap V$ è della forma

$$\begin{pmatrix} a & 0\\ a & d\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

$U\cap V$ è generato quindi dalle due matrici sopra che sono anche linearmente indipendenti in quanto sottoinsieme di elementi della base di V. Se ne deduce che $\dim(U\cap V)=2$.

(3) Per verificare che W è un sottospazio devo verificare che presi $A,B\in W$ e $\lambda\in\mathbb{R}$ si ha $A+B\in W$ e $\lambda A\in W$. $A,B\in W$ equivale a dire $A=A_1+A_2$, $B=B_1+B_2$ con $A_1,B_1\in U$ e $A_2,B_2\in V$. Essendo U,V sottospazi si ha che $(A_1+B_1),\lambda A_1\in U$ e $(A_2+B_2),\lambda A_2\in V$ da cui $A+B=A_1+A_2+B_1+B_2=(A_1+B_1)+(A_2+B_2)$,

$\lambda A = \lambda(A_1 + A_2) = \lambda A_1 + \lambda A_2$ che quindi appartengono a W in quanto somme di elementi di U e si V, rispettivamente.

Un generico elemento di W si scrive come

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_2 + b_2 & d_2 \end{pmatrix}, \text{ al variare di } a_1, c_1, d_1, a_2, b_2, d_2 \in \mathbb{R}.$$

La dimensione di W è 4 perchè assegnando i valori $a_1 = 1$ e tutti gli altri valori zero si ottiene che la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ appartiene a W, assegnando $c_1 = 1$ e tutti gli altri valori zero si ottiene che la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ appartiene a W, assegnando $c_1 = 1$ e tutti gli altri valori zero si ottiene che la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ appartiene a W. Per ottenere la base canonica standard di $\mathcal{M}(2 \times 2, \mathbb{R})$ basta poi assegnare $b_2 = 1, a_2 = -1, a_1 = 1$ e tutti gli altri valori zero e si ottiene che anche la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ appartiene a W.

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(1) Calcolare la dimensione dell'immagine di f.
(2) Trovare una base del nucleo di A.
(3) Dire se esiste almeno un vettore non nullo $v \in \mathbb{R}^3$ tale che $Av = 2v$ ed eventualmente trovare un tale vettore.
(4) Sai v_1 il primo vettore della base trovata nel punto (2) e v_2 il vettore trovato nel punto (3), dire se v_1 e v_2 sono ortogonali.

Soluzioni. (1) Si verifica subito che $\det A \neq 0$ per cui il rango è 3 che coincide con la dimensione dell'immagine.

(2) Applicando Gauss si ottiene che il vettore $v_1 = (2, -1, 1)$ verifica $Av_1 = (0, 0, 0)$.

(3) Imponendo che $v = (x, y, z)$ verifichi le equazioni di $Av = 2v$ si ottiene un sistema che si può risolvere con Gauss, equivalente a trovare un vettore del nucleo della matrice $(A - 2I)$ con I la matrice identità, ed ottenere $v_2 = (0, 1, 1)$.

(4) Il prodtto scalare tra v_1 e v_2 è nullo per cui i due vettori sono ortogonali.

Esercizio 3. Al variare di $t \in \mathbb{R}$ considerare il sistema:

$$\begin{cases} (t+1)x - 2y + z + (t+2)w = -1 \\ 3x + (t-2)y - 2z + 4w = -t \\ 5x + (t-8)y + 4z + (t+3)w = 1 \end{cases}$$

1. Risolvere il sistema per $t = 1$.
2. Trovare l'unico valore t_0 per cui l'insieme delle soluzioni non è una retta.
3. Risolvere il sistema per il valore $t = t_0$ trovato nel punto precedente.

Soluzioni. 1. Per t=1 il sistema diventa

$$\begin{cases} 2x - 2y + z + 3w = -1 \\ 3x - y - 2z + 4w = -1 \\ 5x - 7y + 4z + 4w = 1 \end{cases}$$

Si puo' procedere eliminando le variabili con Gauss ed ottenendo che le soluzioni sono date dalla retta $(1, 0, 0, -1) + s(15, 13, 8, -4)$ al variare di $s \in \mathbb{R}$.

2. Dato che la dimensione del nucleo dell'applicazione T associata al sistema coincide con $4 - rango(T)$ ed il rango di T è minore od uguale a 3 (la matrice è 3×4) e maggiore od uguale ad 1 (la matrice ha almeno un elemento non nullo), se vogliamo che la soluzione non sia una retta (cioè uno spazio affine di dimensione 1) dobbiamo imporre che il rango della matrice sia esattamente 2. Questo equivale a determinare t in modo tale che ogni minore 3×3 abbia determinante nullo. Calcoliamo il determinante delle prime 3 colonne ed otteniamo: $6t^2 - 20t + 6$ che si annulla in $t = 3$ e $t = 1/3$. Questi sono i due valori candidati ad essere t_0. Per $t = 1/3$ si calcola che il determinante delle ultime 3 colonne è diverso da zero, mentre per $t_0 = 3$ anche gli altri due determinanti sono nulli.

3. Per t=3 il sistema diventa

$$\begin{cases} 4x - 2y + z + 5w = -3 \\ 3x + y - 2z + 4w = -1 \\ 5x - 5y + 4z + 6w = 1 \end{cases}$$

e si vede che l'ultima equazione e' 2 volte la prima meno la seconda, per cui bastano le prime due equazioni. Si ottiene che le soluzioni sono date dal piano

$$\{(0, 1, -1, 0) + (3x, 11x + 14w, 9x + 11w, 3w) : \ x, w \in \mathbb{R}\}.$$