Prima prova in Itinere Ist. Mat. 1, Seconda parte, Tema XY

20 marzo 2018

COGNOME:	NOME:	MATR.:

Esercizio 1. Ad un tavolo si siedono a pranzo 10 commensali. Nel preparare la tavola viene messo un segnaposto col nome per ciascun commensale. I commensali sono 6 donne e 4 uomini.

(1) Quanti sono i possibili modi di disporre i segnaposto?
(2) Se chi prepara la tavola mette una rosa sul tovagliolo per ogni donna, quanti sono i possibili modi di disporre le rose sul tavolo?
(3) Come primo sono stati ordinati 3 risotti ai funghi, 4 spaghetti al pomodoro e 3 tortelli al ragù ma il cameriere non ha segnato le ordinazioni. Quale probabilità ha di indovinare a chi va ogni piatto, senza chiedere ai commensali?
(4) Per secondo sono state ordinate 9 bistecche e 1 insalata. Quale probabilità ha questa volta il cameriere di distribuire correttamente i piatti, sapendo che tra gli uomini c'è un vegetariano?

Soluzione.

(1) Dovendo disporre 10 segnaposto su 10 posti, i modi possibili sono 10!.
(2) Le rose sono 6 e vanno disposte su 6 dei 10 posti, ovvero occorre scegliere 6 tra i 10 posti per disporvi le rose. In tutto si hanno quindi $\binom{10}{6}$ modi per disporre le rose.
(3) I casi possibili in cui disporre i primi preparati sono 10!, i casi favorevoli, ossia quelli che corrispondono alla disposizione esatta dell'ordinazione sono 3!4!3!, infatti queste corrispondono al fatto che i risotti sono posizionati in modo corretto a meno di una loro permutazione (3! in tutto), lo stesso i tortelli mentre gli spaghetti hanno una disposizione corretta a meno di loro permutazioni (che sono 4!). La probabilità è quindi uguale a $3!4!3!/10! = 1/4.200$. Analogamente si poteva calcolare come segue: Ci sono $\binom{10}{3}$ modi per scegliere i 3 posti in cui mettere i risotti, a questo punto 7 persone sono senza il primo, quindi occorre scegliere in $\binom{7}{4}$ modi come mettere gli spaghetti. Infine restano 3 persone e 3 piatti di tortelli, quindi un solo modo per distribuire i piatti, cioè $\binom{3}{3}$. Complessivamente dunque si ottengono $\binom{10}{3}\binom{7}{4}\binom{3}{3}$ modi per distribuire i primi e quindi la probabilità che il cameriere indovini è di $\frac{1}{\binom{10}{3}\binom{7}{4}\binom{3}{3}} = \dfrac{1}{4.200}$.
(4) Basta scegliere a chi dare l'insalata e visto che l'unico vegetariano è un uomo il cameriere ha 4 possibili scelte. Quindi la probabilità di indovinare è $\dfrac{1}{4}$.

Esercizio 2.

1. Risolvere l'equazione differenziale $y' + y\sin(x) + y^2\sin(2x) = 0$ con dato inziale $y(0) = -3$.
2. Dire se la soluzione sopra ammette massimo e minimo su $\mathbb{R}$.

Soluzione.

(1) L'equazione si risolve ponendo $w(x) = \frac{1}{y(x)}$, da cui si ottiene $w' = \sin(x)w + \sin(2x)$ con dato inziale $w(0) = -1/3$. Integrando si ottiene dunque $w(x) = a(x)e^{-\cos(x)}$ con equazione per $a(x)$: $a'(x) = e^{\cos(x)}\sin(2x)$ con dato iniziale $a(0) = -e/3$. La soluzione è dunque $a(x) = -2e^{\cos(x)}\cos(x) + 2e^{\cos(x)} - \frac{e}{3}$ e quindi

$$y(x) = -\frac{3e^{\cos(x)}}{6e^{\cos(x)}\cos(x) - 6e^{\cos(x)} + e}.$$

(2) Il denominatore dell'espressione sopra è una funzione di $\cos(x)$ e ponendo $\cos(x) = t$ il denominatore si può scrivere come $\alpha(t) = 6e^t(t-1) + e$. Il denominatore ha derivata $\alpha'(t) = 6e^t t$ nulla solo per $t = 0$. Al variare di t nell'immagine della funzione coseno, ovvero nell'intervallo $[-1, 1]$ otteniamo che il valore del denominatore varia tra il massimo, assunto per $t = 1$, cioè $\alpha(1) = e$ e il minimo, assunto per $t = 0$, cioè $\alpha(0) = -6 + e < 0$. Infine abbiamo che per $t = -1$ si ha $\alpha(-1) = -12e^{-1} + e$ e valgono le disuguaglianze $-6 + e < -12e^{-1} + e < 0$. Tra 0 e 1 e tra -1 e 0 la funzione $\alpha(t)$ è monotona. Quindi si annulla per un unico valore di $t = t_0$ compreso tra 0 e 1. Di conseguenza l'intervallo massimale di definizione della soluzione $y(x)$ è limitato e agli estremi dell'intervallo il denominatore si annulla e il limite di $y(x)$ è $-\infty$. Quindi la funzione $y(x)$ ammette un massimo sul suo intervallo di definizione, in quanto è continua e definita in un intervallo aperto e il limite per entrambi gli estremi dell'intervallo è $-\infty$, mentre non ammette minimo.

Esercizio 3. Sia $f : [-2,2] \to \mathbb{R}$ definita come $f(x) = x\sqrt{2-x}$ per $x \in [0,2]$ e $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$ per $x \in [-2,0)$.

(1) Dire, giustificando la risposta, se f è integrabile su $[-2,2]$.

(2) Determinare l'insieme degli $x \in [-2,2]$ dove $2f(x) \leq x$ e calcolare l'area dell'insieme

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, x \in [-2,2] \text{ e } f(x) \leq y \leq \frac{x}{2}\right\}.$$

(3) Trovare tutte le F continue su $[-2,2]$ tali che F sia primitiva di f in $[-2,0)\cup(0,2]$.

Soluzione.

(1) f è integrabile su $[-2,2]$ perchè lo è separatamente sugli intervalli $[-2,0)$ e $[0,2]$. Per vedere questo basta notare che f coincide su $[0,2]$ con la funzione continua $x\sqrt{2-x}$ su $[0,2]$(e quindi è integrabile) mentre su $[-2,0)$ f coincide, a meno del punto $x=0$, con l'altra funzione continua $\dfrac{x+2}{x-1}$ e l'integrabilità di f non dipende dal valore che assume in un punto per cui f risulta integrabile su $[-2,0]$.

(2) Imponendo $2f(x) \leq x$ su $[0,2]$ si ottiene la disequazione $2x\sqrt{2-x} \leq x$ dove possiamo semplificare x che è positiva ed ottenere che $2\sqrt{2-x} \leq 1$ se e solo se $x \geq 7/4$. Imponendo $2f(x) \leq x$ su $[-2,0)$ si ha $x^2 - 3x - 4 \leq 0$ vera se $-1 \leq x \leq 0$. Definito $B = [-2,0) \cup [7/4,2]$ l'insieme A è formato dalla regione del piano con $x \in [7/4,2]$ e $0 \leq f(x) \leq y \leq x/2$ e dalla regione con $x \in [-1,0]$ ed $f(x) \leq y \leq x/2 \leq 0$. Tenendo conto che per $x \in B$ si ha $x/2 - f(x) \geq 0$ l'area di A si calcola come somma

$$area(A) = \int_{\frac{7}{4}}^{2} \left(\frac{x}{2} - x\sqrt{2-x}\right) dx + \int_{-1}^{0} \left(\frac{x}{2} - \frac{x+2}{x-1}\right) dx.$$

Resta da calolare le primitive delle funzioni integrande che valgono

$$\int \frac{x}{2}\, dx = \frac{x^2}{4} + c; \;\; \int \frac{x+2}{x-1}\, dx = x + 3\ln(|x-1|) + c$$

e, integrando per parti,

$$\int x\sqrt{2-x}\, dx = -\frac{2}{3}x(2-x)^{3/2} + \int \frac{2}{3}(2-x)^{3/2}\, dx = -\frac{2}{3}x(2-x)^{3/2} - \frac{4}{15}(2-x)^{5/2} + c$$

da cui

$$area(A) = 1 - \frac{49}{4^3} + \frac{2}{3*8} + \frac{1}{15*8} - \frac{1}{4} - 1 + 3\ln(2) = -\frac{347}{960} + 3\ln(2) \sim 1,7178$$

(3) Per trovare una primitiva F si deve avere che $F(x) = x + 3\ln(|x-1|) + c'$ per qualche $c' \in \mathbb{R}$ su $[-2,0)$ ed $F(x) = -(2/3)x(2-x)^{3/2} - (4/15)(2-x)^{5/2} + c$ per qualche $c \in \mathbb{R}$ su $(0,2]$. Imponendo che F sia continua in $x=0$ si ottiene, una volta scelta la costante c, che l'altra costante c' deve verificare $c' = -(4/15)2^{5/2} + c$.

Prima prova in Itinere Ist. Mat. 1, Seconda parte, Tema ZW

20 marzo 2018

COGNOME:	NOME:	MATR.:

Esercizio 1. Ad un tavolo si siedono a pranzo 9 commensali. Nel preparare la tavola viene messo un segnaposto col nome per ciascun commensale. I commensali sono 4 donne e 5 uomini.

(1) Quanti sono i possibili modi di disporre i segnaposto?
(2) Se chi prepara la tavola mette una rosa sul tovagliolo per ogni donna, quanti sono i possibili modi di disporre le rose sul tavolo?
(3) Come primo sono stati ordinati 5 risotti ai funghi, 2 spaghetti al pomodoro e 2 tortelli al ragù ma il cameriere non ha segnato le ordinazioni. Quale probabilità ha di indovinare a chi va ogni piatto, senza chiedere ai commensali?
(4) Per secondo sono state ordinate 8 bistecche e 1 insalata. Quale probabilità ha questa volta il cameriere di distribuire correttamente i piatti, sapendo che tra gli uomini c'è un vegetariano?

Esercizio 2.

1. Risolvere l'equazione differenziale $y' + y\sin(x) - y^2\sin(2x) = 0$ con dato inziale $y(0) = 3$.
2. Dire se la soluzione sopra ammette massimo e minimo su $\mathbb{R}$.

Esercizio 3. Sia $f : [-2,2] \to \mathbb{R}$ definita come $f(x) = x\sqrt{2-x}$ per $x \in [0,2]$ e $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$ per $x \in [-2,0)$.

(1) Dire, giustificando la risposta, se f è integrabile su $[-2,2]$.

(2) Determinare l'insieme degli $x \in [-2,2]$ dove $2f(x) \leq x$ e calcolare l'area dell'insieme

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, x \in [-2,2] \text{ e } f(x) \leq y \leq \frac{x}{2}\right\}.$$

(3) Trovare tutte le F continue su $[-2,2]$ tali che F sia primitiva di f in $[-2,0)\cup(0,2]$.