Prima prova in Itinere Ist. Mat. 1, Prima parte, Tema ALFA

12 giugno 2017

COGNOME:	NOME:	MATR.:

1) il determinante della matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ è

A: -1; B: 2; C: 3 D: 0; E: N.A.

2) I vettori $v_1 = (1, \lambda, -2, 1-\lambda)$, $v_2 = (\lambda, 2, 1, 3\lambda)$ sono ortogonali
A: per $\lambda = 2$; B: per nessun λ ; C: N.A. ; D: per $\lambda = 2, -2$; E: $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

3) La retta tangente al grafico di $f(x) = \sqrt{x^2+1} + e^{-2x}$ nel punto $(0, 2)$ è
A: $y = -2x$; B: $y = 2(1-x)$; C: inesistente; E: N.A. ; D: $y = 1 + 2x$.

4) Il limite $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-1}{\log(1-x^2)}$ vale
A: -1; B: $-1/2$; C: 0; D: $-\infty$; E: N.A.

5) La funzione $f(x) = x^4 - 2x^3$ ha in $x = 0$ un punto di
A: flesso; B: minimo locale; C: N.A. D: massimo locale; E: discontinuità.

6) Il numero complesso $\dfrac{(i+2)^2}{i+1}$ è uguale a
A: $(1+i)/2$; B: N.A.; C: $(5-i)/2$; D: $(7+i)/2$; E: $(i-7)/2$.

7) Il valore dell'integrale $\int_0^\pi \sin(x)\cos^2(x)\,dx$ è
A: 1 ; B: 2/3 ; C: 1/2 ; D: $-1/2$; E: N.A.

8) Le targhe a 4 posti a scelta tra $1, 2, A, B, C$ sono
A: N.A.; B: $2^4 * 3^4$; C: 5^4 D: 500; E: 20.

	1	2	3	4	5	6	7	8
RISPOSTE	E	C	B	A	A	D	B	C

Prima prova in Itinere Ist. Mat. 1, Prima parte, Tema BETA

12 giugno 2017

COGNOME:	NOME:	MATR.:

1) il determinante della matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ è

A: 0; B: 3; C: -4 D: -1; E: N.A.

2) I vettori $v_1 = (2, \lambda, -2, 1-\lambda)$, $v_2 = (\lambda, 2, 1, 3\lambda)$ sono ortogonali
A: per $\lambda = -2$; B: per nessun λ ; C: N.A. ; D: per $\lambda = 2, \frac{1}{3}$; E: $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

3) La retta tangente al grafico di $f(x) = \sqrt{x^2+1} + e^{2x}$ nel punto $(0, 2)$ è
A: $y = -2x$; B: $y = 2(1-x)$; C: inesistente; E: N.A. ; D: $y = 1 + 2x$.

4) Il limite $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^{x^2} - 1}{\log(1 + x^4)}$ vale
A: 1; B: 1/2; C: 0; D: $+\infty$; E: N.A.

5) La funzione $f(x) = 2x^4 - x^6$ ha in $x = 0$ un punto di
A: flesso; B: minimo locale; C: N.A. D: massimo locale; E: discontinuità.

6) Il numero complesso $\dfrac{(i+1)^2}{i-1}$ è uguale a
A: $(1+i)/2$; B: N.A.; C: $(5-i)/2$; D: $(2-2i)/2$; E: $(i-3)/2$.

7) Il valore dell'integrale $\int_0^{\pi/2} \sin^2(x) \cos(x)\, dx$ è
A: 1 ; B: 2/3 ; C: N.A. ; D: $-1/2$; E: 1/2.

8) Le targhe a 5 posti a scelta tra $1, 2, A, B$ sono
A: N.A.; B: 1024; C: 5^3 D: 500; E: 250.

	1	2	3	4	5	6	7	8
RISPOSTE	C	D	E	D	B	D	C	B

Prima prova in Itinere Ist. Mat. 1, Prima parte, Tema GAMMA

12 giugno 2017

COGNOME:	NOME:	MATR.:

1) il determinante della matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ è

A: -2; B: 2; C: -4 D: 0; E: N.A.

2) I vettori $v_1 = (-1, \lambda, -2, 1-\lambda)$, $v_2 = (\lambda, 2, 1, 3\lambda)$ sono ortogonali
A: per $\lambda = 2$; B: per nessun $\lambda \in \mathbb{R}$; C: N.A.; D: per $\lambda = \frac{1}{2}, -2$; E: $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

3) La retta tangente al grafico di $f(x) = \sqrt{x^2+9} - e^{-3x}$ nel punto $(0, 2)$ è
A: $y = -3x$; B:$y = 2 + 2x$; C: inesistente; D: $y = 2 + 3x$; E: N.A.

4) Il limite $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\log(1+x^2)}$
A: non esiste; B: vale $-\infty$; C: vale 0; D: vale $+\infty$; E: N.A.

5) La funzione $f(x) = x^4 - 2x^2$ ha in $x = 0$ un punto di
A: flesso; B: minimo locale; C: N.A. D: massimo locale; E: discontinuità.

6) Il numero complesso $\frac{(2i+1)^2}{i+1}$ è uguale a
A: $(1+i)/2$; B: N.A.; C: $(5-i)/2$; D: $(3+i)/2$; E: $(1+7i)/2$.

7) Il valore dell'integrale $\int_0^{\pi/2} \sin(x)\cos^2(x)\,dx$ è
A: 1 ; B: 1/2 ; C: 1/3 ; D: $-1/2$; E: N.A.

8) Le targhe a 4 posti a scelta tra $1, 2, 3, A, B$ sono
A: N.A.; B: $3^3 * 2^2$; C: 5^3 D: 500; E: 250.

	1	2	3	4	5	6	7	8
RISPOSTE	D	B	D	A	D	E	C	A

Prima prova in Itinere Ist. Mat. 1, Prima parte, Tema DELTA

12 giugno 2017

COGNOME:	NOME:	MATR.:

1) I vettori $v_1 = (1, \lambda, -2, 1-\lambda)$, $v_2 = (\lambda, 2, 1, 3\lambda)$ sono ortogonali
A: per $\lambda = 2$; B: per nessun λ ; C: per $\lambda = 2, -2$; D: N.A.; E: $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

2) La retta tangente al grafico di $f(x) = \sqrt{x^2+1} + e^{-2x}$ nel punto $(0, 2)$ è
A: $y = -2x$; B: $y = 2(1-x)$; C: inesistente; E: N.A. ; D: $y = 1 + 2x$.

3) La funzione $f(x) = 2x^4 - x^6$ ha in $x = 0$ un punto di
A: flesso; B: minimo locale; C: N.A. D: massimo locale; E: discontinuità.

4) Il numero complesso $\dfrac{(i+1)^2}{i-1}$ è uguale a
A: $(2-2i)/2$; B: N.A.; C: $(i-3)/2$; D: $(1+i)/2$; E: $(5-i)/2$.

5) Il valore dell'integrale $\int_0^{\pi/2} \sin^2(x)\cos(x)\,dx$ è
A: 1 ; B: 1/3 ; C: N.A. ; D: $-1/2$; E: 1/2.

6) il determinante della matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ è

A: N.A. B: 0; C: 3 D: -2; E: -1.

7) Il limite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-1}{\log(1+x^4)}$
A: non esiste; B: vale 1; C: vale 0; D: vale $+\infty$; E: N.A.

8) Le targhe a 5 posti a scelta tra $1, 2, A, B$ sono
A: 500; B: 5^3 ; C: 1024; D: N.A.; E: 250.

	1	2	3	4	5	6	7	8
RISPOSTE	D	B	B	A	B	D	D	C

Prima prova in Itinere Ist. Mat. 1, Prima parte, Tema EPSILON

12 giugno 2017

COGNOME:	NOME:	MATR.:

1) Le targhe a 4 posti a scelta tra $1, 2, 3, A, B$ sono
A: N.A.; B: $3^3 * 2^2$; C: 5^3 D: 500; E: 250.

2) il determinante della matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ è

A: 0; B: 3; C: -4 D: -1; E: N.A.

3) I vettori $v_1 = (2, \lambda, -2, 1-\lambda)$, $v_2 = (\lambda, 2, 1, 3\lambda)$ sono ortogonali
A: per $\lambda = -2$; B: per nessun λ ; C: N.A. ; D: per $\lambda = 2, \frac{1}{3}$; E: $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

4) Il numero complesso $\dfrac{(2i+1)^2}{i+1}$ è uguale a
A: $(1+i)/2$; B: N.A.; C: $(5-i)/2$; D: $(3+i)/2$; E: $(1+7i)/2$.

5) Il valore dell'integrale $\int_0^{\pi/2} \sin(x)\cos^2(x)\, dx$ è
A: 1 ; B: 2/3 ; C: 1/2 ; D: $-1/2$; E: N.A.

6) La retta tangente al grafico di $f(x) = \sqrt{x^2+1} + e^{2x}$ nel punto $(0, 2)$ è
A: $y = -2x$; B: $y = 2(1-x)$; C: inesistente; E: N.A. ; D: $y = 1 + 2x$.

7) Il limite $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{\log(1+x^2)}$
A: non esiste; B: vale 1; C: vale 0; D: vale $+\infty$; E: N.A.

8) La funzione $f(x) = x^4 - 2x^2$ ha in $x = 0$ un punto di
A: flesso; B: minimo locale; C: N.A. D: massimo locale; E: discontinuità.

	1	2	3	4	5	6	7	8
RISPOSTE	A	C	D	E	E	E	A	D

Prima prova in Itinere Ist. Mat. 1, Prima parte, Tema ZETA

12 giugno 2017

COGNOME:	NOME:	MATR.:

1) La funzione $f(x) = x^4 - 2x^3$ ha in $x = 0$ un punto di
A: flesso; B: minimo locale; C: N.A. D: massimo locale; E: discontinuità.

2) Il numero complesso $\dfrac{(i+2)^2}{i+1}$ è uguale a
A: $(1+i)/2$; B: $(i-3)/2$; C: $(5-i)/2$; D: $(3+i)/2$; E: N.A.

3) Il valore dell'integrale $\int_0^\pi \sin(x)\cos^2(x)\,dx$ è
A: 1 ; B: 2/3 ; C: 1/2 ; D: $-1/2$; E: N.A.

4) Le targhe a 4 posti a scelta tra $1, 2, A, B, C$ sono
A: N.A.; B: $2^4 * 3^4$; C:20 D: 500; E: 5^4 .

5) il determinante della matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ è

A: -2; B: 2; C: -4 D: 0; E: N.A.

6) I vettori $v_1 = (-1, \lambda, -2, 1-\lambda)$, $v_2 = (\lambda, 2, 1, 3\lambda)$ sono ortogonali
A: per $\lambda = 2$; B: per $\lambda = \frac{1}{2}, -2$; C: N.A.; D: per nessun $\lambda \in \mathbb{R}$; E: $\forall\lambda \in \mathbb{R}$.

7) La retta tangente al grafico di $f(x) = \sqrt{x^2+9} - e^{-3x}$ nel punto $(0, 2)$ è
A: $y = -3x$; B:$y = 2 + 2x$; C: inesistente; D: $y = 2 + 3x$; E: N.A.

8) Il limite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2} - 1}{\log(1 - x^2)}$
A: N.A. B: vale -1; C: vale 0; D: vale $-\infty$; E: non esiste.

	1	2	3	4	5	6	7	8
RISPOSTE	A	E	B	E	D	D	D	B

Compito di Istituzioni di Matematica 1
Seconda parte, Tema A
12 giugno 2017

COGNOME:	NOME:	MATR.:

Esercizio 1.
Determinare tutte le $(z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ soluzioni del sistema

$$\begin{cases} z^2 - 4z + i + 4 = 0 \\ \bar{z}(w + \bar{w}) = i(\bar{z} - z) - |w| + z \end{cases}$$

Soluzione.

Risolvo per prima l' equazione $z^2 - 4z + i + 4 = 0$ dato che contiene solo l'incognita z. E' una equazione di secondo grado per cui la formula risolutiva (valida anche nel campo dei complessi) mi da $z = 2 + \sqrt{-i}$ dove con $\sqrt{-i}$ si indicano le due radici del numero complesso $-i$. Dato che $-i = e^{\frac{3\pi i}{2}}$, si ottiene che le sue radici sono $e^{\frac{3\pi i}{4}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i, e^{\frac{7\pi i}{4}} = +\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i$, da cui

$$z_1 = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i, \quad z_2 = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i,$$

sono i numeri complessi z che verificano la prima equazione.

Fissiamo ora $z = z_1$ e troviamo i w che risolvono la seconda equazione. Uso la forma algebrica di w, ossia pongo $w = a + ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$ ed impongo:

$$\left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i\right) 2a = +\sqrt{2} - \sqrt{a^2 + b^2} + 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i.$$

Eguagliando le parti immaginarie dei numeri complessi sopra si ottiene $a = -\frac{1}{2}$, sostituendo ed eguagliando le parti reali si ha $\sqrt{\frac{1}{4} + b^2} = 4$ da cui $b = \pm \frac{3\sqrt{7}}{2}$. Definite

$$w_1 = -\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{7}}{2} i, w_2 = -\frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{7}}{2} i$$

si ha che $(z_1, w_1), (z_1, w_2)$ sono soluzioni dell'equazione. Cerchiamo ora i numeri complessi w che risolvono la seconda equazione con $z = z_2$. Cerco $w = c + id$ con $c, d \in \mathbb{R}$

$$\left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i\right) 2c = -\sqrt{2} - \sqrt{c^2 + d^2} + 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i.$$

Eguagliando le parti immaginarie si ottiene $c = -\frac{1}{2}$, sostituendo si ha $d = \pm \frac{3\sqrt{7}}{2}$ ed i w che risolvono sono gli stessi w_1, w_2 trovati sopra.

Le soluzioni del sistema iniziale sono quindi le 4 soluzioni $(z_1, w_1), (z_1, w_2), (z_2, w_1), (z_2, w_2)$ con $z_1 = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$, $z_2 = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i$, $w_1 = -\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{7}}{2} i$, $w_2 = -\frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{7}}{2} i$.

Esercizio 2.
Risolvere i seguente integrali:

$$(a)\int_1^e \frac{\ln(x)}{x(4-\ln^2(x))}\,dx; \quad (b)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(x)\ln(1+\cos^2(x))\,dx$$

Soluzione. (a) faccio la sostituzione $y=\ln^2(x)$ ed ottengo $dy = 2\frac{\ln(x)}{x}dx$, uso il fatto che $\int \frac{1}{4-y}dy = -\ln(|4-y|)$ ed ottengo

$$\int_1^e \frac{\ln(x)}{x(4-\ln^2(x))}\,dx = -\frac{1}{2}\ln(|4-\ln^2(x)|)|_1^e = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{4}{3}\right) = \ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right).$$

(b) faccio la sostituzione $\cos(x)=t$ ed ottengo $dt=-\sin(x)dx$, usando che $\sin^2(x) = 1-\cos^2(x)$ ci si riduce a trovare l'integrale indefinito

$$\int \sin^3(x)\ln(1+\cos^2(x))\,dx = -\int (1-t^2)\ln(1+t^2)\,dt$$

integro per parti

$$\int (t^2-1)\ln(1+t^2)\,dt = \left(\frac{t^3}{3}-t\right)\ln(1+t^2) + \int \frac{2t\left(t-\frac{t^3}{3}\right)}{1+t^2}\,dt$$

Poiché $2t^2-\frac{2t^4}{3} = (\frac{8}{3}-\frac{2t^2}{3})(t^2+1)-\frac{8}{3}$ si ha

$$\int \frac{2t\left(t-\frac{t^3}{3}\right)}{1+t^2}\,dt = -\frac{2t^3}{9}+\frac{8t}{3}-\frac{8}{3}\arctan(t)+c$$

da cui

$$\int \sin^3(x)\ln(1+\cos^2(x))\,dx = \left(\frac{t^3}{3}-t\right)\ln(1+t^2) - \frac{2t^3}{9}+\frac{8t}{3}-\frac{8}{3}\arctan(t)+c|_{t=\cos(x)}$$

e

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(x)\ln(1+\cos^2(x))\,dx = \frac{2}{3}\ln(2)-\frac{22}{9}+\frac{2\pi}{3}.$$

Esercizio 3. Al variare del parametro k in $\mathbb{R}$, si consideri l'applicazione lineare T_k da $\mathbb{R}^3$ in se', rappresentata dalla matrice:

$$A_k = \begin{bmatrix} 1 & 3k+4 & -4k+6 \\ -1 & -k-2 & k^2+2k-3 \\ 0 & 2k+2 & -2k+4 \end{bmatrix}$$

i) al variare di $k \in \mathbb{R}$ si stabilisca il rango di A_k e la dimensione del nucleo di T_k.

ii) Dire per quali k il sistema

$$A_k \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ha soluzione determinando quelli per cui essa è unica.

iii) Per i valori di k tali per cui T_k non è surgettiva si determini:(a) una base del nucleo di T_k, (b) una base del nucleo dell'applicazione $T_k \circ T_k$.

Soluzione:

i) Il determinante di A_k è $-2(k-1)(k+1)^2$ per cui per $k \neq 1, -1$ il rango di A_k è 3 e quindi la dimensione del nucleo è 0. Per $k = 1$ la matrice A_k diventa: $A_k = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ e quindi il rango è 2 (per esempio perché il primo minore 2×2 ha determinante non nullo) e la dimensione del nucleo è $3 - 2 = 1$. Infine per $k = -1$ la matrice A_k diventa $A_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 10 \\ -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ e quindi il rango è 2 e la dimensione del nucleo 1.

ii) Per $k \neq 1, -1$ il sistema ha sempre un'unica soluzione in quanto il rango$(A_k) = 3$. Per $k = 1$ il rango di $\left[A_k \begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$ è 3 (basta guardare il minore fatto con prima, seconda e quarta colonna) e essendo $3 > 2 = \operatorname{rk} A_k$ segue che il sistema non ha soluzione. Per $k = -1$ si ha ancora che il rango di $\left[A_k \begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$ è 3 (basta guardare il minore fatto con seconda, terza e quarta colonna) e essendo $3 > 2 = \operatorname{rk} A_k$ segue che il sistema non ha soluzione.

iii) Per $k = 1$ una base del nucleo di T_k è data dal vettore $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Infatti si verifica che tale vettore annulla A_k e quindi sta nel nucleo. Poiché il nucleo ha dimensione 1, quello è un generatore. Per $k = -1$ una base del nucleo di T_k è data dal vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Infatti si verifica che tale vettore annulla A_k e quindi sta nel nucleo. Poiché il nucleo ha dimensione 1, quello è un generatore. Per $k = 1$ si ha $A_k^2 = \begin{bmatrix} -6 & -6 & 6 \\ 2 & 2 & -2 \\ -4 & -4 & 4 \end{bmatrix}$ che ha rango 1 (tutte le colonne sono multiple una dell'altra) e dunque la dimensione del nucleo è 2. Quindi i due vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ che stanno nel nucleo e sono tra loro indipendenti sono anche una base del nucleo. Per $k = -1$ si ha $A_k^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 66 \\ 0 & 0 & -30 \\ 0 & 0 & 36 \end{bmatrix}$ che ha rango 1 (tutte le colonne sono multiple una dell'altra) e dunque la dimensione del nucleo è 2. Quindi i due vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ che stanno nel nucleo e sono tra loro indipendenti sono anche una base del nucleo.

Esercizio 4.

Sia $f(x) = e^{-x} - 3\arctan(e^{-x})$. Determinare

(i) i limiti di f a $+\infty$ e $-\infty$;

(ii) gli insiemi dove f è crescente/decrescente;

(iii) eventuali punti di massimo e minimo locali.

Soluzione:

(i) Per $x \to +\infty$ si ha che $e^{-x} \to 0$ e $\arctan(x)$ è continua in 0 ed $\arctan(0) = 0$. Quindi

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x} - 3\arctan(e^{-x}) = 0.$$

Per $x \to -\infty$ si ha che $e^{-x} \to +\infty$ e $\arctan(x)$ è limitata. Quindi

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-x} - 3\arctan(e^{-x}) = +\infty.$$

(ii) La derivata di $f(x)$ è

$$\frac{2e^{2x} - 1}{e^{x} + e^{3x}}$$

e il denominatore è sempre positivo. Quindi $f'(x) > 0$ se e solo se $2e^{2x} - 1 > 0$, ovvero se

$$e^{2x} > \frac{1}{2}$$

ovvero se $x > \frac{\log(\frac{1}{2})}{2}$.

(iii) Poiché $f(x)$ è crescente per $x > \frac{\log(\frac{1}{2})}{2}$ e decrescente per $x < \frac{\log(\frac{1}{2})}{2}$, si ha che $x = \frac{\log(\frac{1}{2})}{2}$ è un punto di minimo assoluto per $f(x)$ e non ci sono massimi locali.