**Prima prova in Itinere Ist. Mat. 1, Prima parte, Tema ALFA**

3 luglio 2017

| COGNOME: | NOME: | MATR.: |
|---|---|---|

1) L'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ data da $f(x, y, z) = (3x+2y+z, kx+2y+kz)$ è suriettiva
A: sempre; B: mai; C: per $k \neq 1$ D: per $k \neq 2$; E: N.A.

2) La retta ortogonale alla retta $y = 2x - 10$ e passante per il punto $(-1, 1)$ è
A: $y = -x/2 + 10$; B: $y = (1 - x)/2$ ; C: N.A. ; D: $y = -2x - 1$; E: $y = x/2$.

3) La funzione $y = \sqrt{x^3 + 1}$ è convessa
A: per $-1 < x < 1$; B: su tutto $\mathbb{R}$; C: per $x > 0$; D: N.A.; E: mai.

4) Il limite $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 - e^x}{\cos(x) + 2^x}$ vale
A: $-1$; B: $+\infty$; C: $-\infty$; D: 0; E: N.A.

5) La funzione $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{1-x}}$ ha in $x = 0$ derivata
A: 1; B: $\sqrt{2}$; C: N.A. D: 3; E: inesistente.

6) Il coniugato del numero complesso $\dfrac{(i + \sqrt{3})^4}{8}$ è uguale a
A: $1 + \sqrt{3}$; B: N.A.; C: $i\sqrt{3}$; D: $-1 - i\sqrt{3}$ ; E: 2.

7) Il valore dell'integrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\, dx$ è
A: $(\sqrt{2} + 1)/2$ ; B: $\sqrt{2} - 1$ ; C: $1/2$ ; D: $\sqrt{2}/2$; E: N.A.

8) La disequazione $\ln(e^{2-x} + 1) \geq \ln(2)$ è vera solo per
A: $x \leq 2$; B: nessun $x \in \mathbb{R}$; C: $x \geq 1$ D: $1 < x < e$; E: N.A.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **RISPOSTE** | A | B | C | C | A | D | B | A |

**Prima prova in Itinere Ist. Mat. 1, Prima parte, Tema BETA**

3 luglio 2017

| COGNOME: | NOME: | MATR.: |
|---|---|---|

1) L'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ data da $f(x, y, z) = (x + 2y + kz, kx + 2y + z)$ è suriettiva
A: sempre; B: mai; C: per $k \neq 1$ D: per $k \neq 0$; E: N.A.

2) La retta ortogonale alla retta $y = 3x - 10$ e passante per il punto $(2, 1)$ è
A: $y = -x/3 + 10$; B: $y = (1 - x)/3$ ; C: N.A. ; D: $y = (2 - x)/3 + 1$; E: $y = (x + 1)/3$

3) La funzione $y = \sqrt{x^3 - 1}$ è convessa
A: per $x > \sqrt[3]{4}$; B: su tutto $\mathbb{R}$; C: per $x > 0$; d: N.A.; E: mai.

4) Il limite $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - e^x}{4^x - \arctan(x)}$ vale
A: $-1$; B: 0; C: $+\infty$; D: $-\infty$; E: N.A.

5) La funzione $f(x) = \sqrt{\dfrac{x + 1}{2 + x}}$ ha in $x = 0$ derivata
A: $1/2\sqrt{2}$; B: $\sqrt{2}/8$; C: N.A. D: $4\sqrt{2}$; E: inesistente.

6) Il coniugato del numero complesso $\dfrac{(\sqrt{3} - i)^4}{8}$ è uguale a
A: $-1 + \sqrt{3}$; B: N.A.; C: $i\sqrt{3}$; D: $-1 - i\sqrt{3}$ ; E: 2.

7) Il valore dell'integrale $\displaystyle\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}\,dx$ è
A: $2(\sqrt{5} + 1)$ ; B: $\sqrt{5} - 1$ ; C: $1/2$ ; D: $2\sqrt{5}$; E: N.A.

8) La disequazione $\ln(e^{-2x} + 1) \leq \ln(2)$ è vera solo per
A: $x \leq -1/2$; B: nessun $x \in \mathbb{R}$; C: $x < 1$ D: $1 < x < e$; E: N.A.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **RISPOSTE** | C | D | A | B | B | B | E | E |

**Prima prova in Itinere Ist. Mat. 1, Prima parte, Tema GAMMA**

3 luglio 2017

| COGNOME: | NOME: | MATR.: |
|---|---|---|

1) L'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ data da $f(x, y, z) = (x + 2ky + z, kx + 2y + z)$ è suriettiva
A: sempre; B: mai; C: per $k \neq 0$ D: per $k \neq 1$; E: N.A.

2) La retta ortogonale alla retta $y = x - 11$ e passante per il punto $(-1, 1)$ è
A: $y = -x + 11$; B: $y = (1 - x)/2$ ; C: N.A. ; D: $y = -2x - 1$; E: $y = -x$.

3) La funzione $y = 1 - \sqrt{x^3 + 1}$ è convessa
A: per $-1 < x < 1$; B: su tutto $\mathbb{R}$; C: per $x > 0$; D: N.A.; E: mai.

4) Il limite $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 - x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^4} + 1}$ vale
A: 0; B: 1; C: $-\infty$; D: $+\infty$; E: N.A.

5) La funzione $f(x) = \sqrt{\dfrac{x + 2}{1 - x}}$ ha in $x = 0$ derivata
A: $3/2\sqrt{2}$; B: $3\sqrt{2}$; C: N.A. D: 3; E: inesistente.

6) Il numero complesso $\dfrac{(i + \sqrt{3})^4}{8}$ è uguale a
A: $1 + \sqrt{3}$; B: N.A.; C: $i\sqrt{3}$; D: $-1 - i\sqrt{3}$ ; E: $-1 + i\sqrt{3}$.

7) Il valore dell'integrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}\, dx$ è
A: $2(\sqrt{5} + 1)$ ; B: $\sqrt{5} - 1$ ; C: $1/2$ ; D: $2\sqrt{5}$; E: N.A.

8) La disequazione $\ln(e^{2x+1} + 1) \geq \ln(2)$ è vera solo per
A: $x \geq 2$; B: nessun $x \in \mathbb{R}$; C: $x \geq -1/2$ D: $-1 < x < 2$; E: N.A.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **RISPOSTE** | D | E | D | D | A | E | E | C |

**Prima prova in Itinere Ist. Mat. 1, Prima parte, Tema DELTA**

3 luglio 2017

| COGNOME: | NOME: | MATR.: |
|---|---|---|

1) La funzione $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+2}{1-x}}$ ha in $x = 0$ derivata
A: $3/2\sqrt{2}$; B: $3\sqrt{2}$; C: N.A. D: 3; E: inesistente.

2) La funzione $y = 1 - \sqrt{x^3+1}$ è convessa
A: per $-1 < x < 1$; B: su tutto $\mathbb{R}$; C: per $x > 0$; D: N.A.; E: mai.

3) Il limite $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 - x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^4}+1}$ vale
A: 0; B: 1; C: $-\infty$; D: $+\infty$; E: N.A.

4) L'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ data da $f(x, y, z) = (3x+2y+z, kx+2y+kz)$ è suriettiva
A: sempre; B: mai; C: per $k \neq 1$ D: per $k \neq 2$; E: N.A.

5) Il numero complesso $\dfrac{(i+\sqrt{3})^4}{8}$ è uguale a
A: $1+\sqrt{3}$; B: N.A.; C: $i\sqrt{3}$; D: $-1-i\sqrt{3}$ ; E: $-1+i\sqrt{3}$.

6) La disequazione $\ln(e^{2-x}+1) \geq \ln(2)$ è vera solo per
A: $x \leq 2$; B: nessun $x \in \mathbb{R}$; C: $x \geq 1$ D: $1 < x < e$; E: N.A.

7) La retta ortogonale alla retta $y = 3x - 10$ e passante per il punto $(2, 1)$ è
A: $y = -x/3 + 10$; B: $y = (1-x)/3$ ; C: N.A. ; D: $y = (2-x)/3 + 1$; E: $y = (x+1)/3$

8) Il valore dell'integrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$ è
A: $2(\sqrt{5}+1)$ ; B: $\sqrt{5}-1$ ; C: $1/2$ ; D: $2\sqrt{5}$; E: N.A.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **RISPOSTE** | A | D | D | A | E | A | D | E |

**Prima prova in Itinere Ist. Mat. 1, Prima parte, Tema EPSILON**

3 luglio 2017

| COGNOME: | NOME: | MATR.: |
|---|---|---|

1) La disequazione $\ln(e^{2x+1}+1) \geq \ln(2)$ è vera solo per
A: $x \geq 2$; B: nessun $x \in \mathbb{R}$; C: $x \geq -1/2$ D: $-1 < x < 2$; E: N.A.

2) L'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ data da $f(x, y, z) = (x + 2y + kz, kx + 2y + z)$ è suriettiva
A: sempre; B: mai; C: per $k \neq 1$ D: per $k \neq 0$; E: N.A.

3) Il limite $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 - e^x}{4^x - \arctan(x)}$ vale
A: $-1$; B: 0; C: $+\infty$; D: $-\infty$; E: N.A.

4) La funzione $y = \sqrt{x^3 + 1}$ è convessa
A: per $-1 < x < 1$; B: su tutto $\mathbb{R}$; C: per $x > 0$; D: N.A.; E: mai.

5) Il coniugato del numero complesso $\dfrac{(\sqrt{3} - i)^4}{8}$ è uguale a
A: $-1 + \sqrt{3}$; B: N.A.; C: $i\sqrt{3}$; D: $-1 - i\sqrt{3}$ ; E: 2.

6) La funzione $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{2+x}}$ ha in $x = 0$ derivata
A: $1/2\sqrt{2}$; B: $\sqrt{2}/8$; C: N.A. D: $4\sqrt{2}$; E: inesistente.

7) La retta ortogonale alla retta $y = x - 11$ e passante per il punto $(-1, 1)$ è
A: $y = -x + 11$; B: $y = (1 - x)/2$ ; C: N.A. ; D: $y = -2x - 1$; E: $y = -x$.

8) Il valore dell'integrale $\displaystyle\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}\,dx$ è
A: $2(\sqrt{5} + 1)$ ; B: $\sqrt{5} - 1$ ; C: $1/2$ ; D: $2\sqrt{5}$; E: N.A.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **RISPOSTE** | C | C | B | C | B | B | E | E |

**Prima prova in Itinere Ist. Mat. 1, Prima parte, Tema ZETA**

3 luglio 2017

| COGNOME: | NOME: | MATR.: |
|---|---|---|

1) La funzione $y = \sqrt{x^3 - 1}$ è convessa
A: per $x > \sqrt[3]{4}$; B: su tutto $\mathbb{R}$; C: per $x > 0$; d: N.A.; E: mai.

2) Il limite $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^4} + 1}$ vale
A: 0; B: 1; C: $-\infty$; D: $+\infty$; E: N.A.

3) La funzione $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+2}{1-x}}$ ha in $x = 0$ derivata
A: $3/2\sqrt{2}$; B: $3\sqrt{2}$; C: N.A. D: 3; E: inesistente.

4) Il coniugato del numero complesso $\dfrac{(i+\sqrt{3})^4}{8}$ è uguale a
A: $1 + \sqrt{3}$; B: N.A.; C: $i\sqrt{3}$; D: $-1 - i\sqrt{3}$ ; E: 2.

5) La disequazione $\ln(e^{-2x} + 1) \leq \ln(2)$ è vera solo per
A: $x \leq -1/2$; B: nessun $x \in \mathbb{R}$; C: $x < 1$ D: $1 < x < e$; E: N.A.

6) Il valore dell'integrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\, dx$ è
A: $(\sqrt{2} + 1)/2$ ; B: $\sqrt{2} - 1$ ; C: $1/2$ ; D: $\sqrt{2}/2$; E: N.A.

7) La retta ortogonale alla retta $y = 2x - 10$ e passante per il punto $(-1, 1)$ è
A: $y = -x/2 + 10$; B: $y = (1 - x)/2$ ; C: N.A. ; D: $y = -2x - 1$; E: $y = x/2$.

8) L'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ data da $f(x, y, z) = (x + 2ky + z, kx + 2y + z)$ è suriettiva
A: sempre; B: mai; C: per $k \neq 0$ D: per $k \neq 1$; E: N.A.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **RISPOSTE** | A | D | A | D | E | B | B | D |

**Compito di Istituzioni di Matematica 1**
**Seconda parte, Tema A**
3 luglio 2017

| COGNOME: | NOME: | MATR.: |
|---|---|---|

**Esercizio 1.** Supponiamo di poter scrivere utilizzando un alfabeto di $n$ lettere.

(1) Quante parole di lunghezza $k$ si possono costruire?
(2) Quante parole di lunghezza $k$ si possono scrivere senza usare due volte la stessa lettera in una parola?
(3) Quante parole di lunghezza $k$ si possono scrivere senza avere due lettere consecutive uguali?
(4) Se si scelgono un certo numero $m$ di prefissi lunghi 3 lettere, quante sono le parole di lunghezza $k$ che non iniziano con nessuno di questi prefissi?

**Soluzione**.

(1) Avendo a disposizione $n$ lettere, senza condizioni sulle loro ripetizioni, per ognuna delle $k$ posizioni della parola si può scegliere tra $n$ lettere distinte. Quindi in totale si hanno $n^k$ parole.
(2) Se non si possono ripetere le lettere, dobbiamo contare le combinazionidi $k$ lettere in un insiene di $n$, ovvero $n!/(n-k)!$.
(3) Se due lettere consecutive non possono essere uguali, possiamo scegliere la prima lettera in $n$ modi, la seconda in $n-1$ modi e anche tutte le successive lettere in $n-1$ modi perché ciascuna deve essere diversa dalla precedente, quindi in totale $n \cdot (n-1)^{(k-1)}$ parole.
(4) Fissato uno degli $m$ prefissi, rimangono a disposizione $k-3$ lettere per formare la parola, ovvero $n^{k-3}$ parole. Questo per ciascun prefisso, quindi moltiplicando per il numero di prefissi di 3 lettere otteniamo in totale $mn^{k-3}$ parole che iniziano con uno di questi prefissi. Dunque le parole di $k$ lettere che non iniziano con nessuno degli $m$ prefissi sono $n^k - mn^{k-3} = (n^3 - m)n^{k-3}$.

**Esercizio 2.**
(a) Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y' + 2x^3 - 2xy = 0$;
(b) Determinare la soluzione dell'equazione differenziale $y' = x^3y^3 - xy$ tale che $y(0) = 1$.

**Soluzione**. (a) Come primo passo si calcola la soluzione generale $v$ dell'equazione omogenea $v' - 2xv = 0$ che è data da $v(x) = Ce^{x^2}$ al variare di $C \in \mathbb{R}$. Cerco poi una soluzione particolare dell'equazione di partenza della forma $y(x) = g(x)v(x)$ con $g$ da determinare. Derivando si ha che $g$ deve risolvere l'equazione $g'(x)v(x) = -2x^3$, ossia, scelto ad esempio $C = 1$, $g'(x) = -2x^3e^{-x^2}$. Integrando nella variabile $t = -x^2$ e poi per parti si ha $g(x) = (1 + x^2)e^{-x^2}$, da cui una soluzione particolare $y_p$ di $y' + 2x^3 - 2xy = 0$ $y_p(x) = 1 + x^2$. La soluzione generale cercata $y$ si ottiene sommando a $y_p$ una qualsiasi soluzione dell'omogenea, da cui

$$y(x) = 1 + x^2 + Ce^{x^2}$$

definita per ogni $x \in \mathbb{R}$.

(b) E' un'equazione di Bernoulli di esponente $\alpha = 3$ e con dato iniziale non nullo per cui divido tutto per $y^3$ ed ottengo $\dfrac{y'}{y^3} = x^3 - x\dfrac{1}{y^2}$. Faccio poi il cambio di variabile $u(x) = y^{1-\alpha}(x) = 1/y^2(x)$ e derivando $u$ si ottiene

$$u' = (-2)\frac{y'}{y^3} = (-2)(x^3 - x\frac{1}{y^2}) = -2x^3 + 2xu$$

con la condizione iniziale $u(0) = 1/y^2(0) = 1$. Usando il punto (a) si ha che $u(x) = 1 + x^2 + Ce^{x^2}$ con $C$ da determinare in modo tale che $u(0) = 1$. Si ha $C = 0$ e quindi la soluzione cercata $y(x)$ verifica

$$y^2(x) = \frac{1}{u(x)} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Usando la condizione $y(0) = 1$ si deduce che è necessario scegliere la radice positiva dell'equazione sopra ossia

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Si noti che $y$ ha dominio di esistenza tutto $\mathbb{R}$.

**Esercizio 3.** Si determini l'insieme $M$ di tutte le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x + 2y - 2z + 2w = 0 \\ 2x - y + 11z - 16w = 0 \\ 3x + y + 9z - 14w = 0 \end{cases}$$

individuandone una base. Determinare poi il sottoinsieme $V$ dei vettori di $M$ che sono ortogonali al vettore di coordinate $(1, 1, 0, -1)$, determinando anche in questo caso una base di $V$.

**Soluzione**. Notiamo che la terza equazione è dipendente dalle prime due in quanto è uguale alla loro somma. Inoltre la prima e la seconda equazione non sono tra loro dipendenti in quanto non sono una multipla dell'altra.

Da questo vediamo che il sistema ha rango 2 e lo spazio delle soluzioni ha dimensione $4 - 2 = 2$. Cerchiamo quindi una base di 2 vettori dello spazio delle soluzioni.

Per quanto osservato, per risolvere il sistema è sufficiente risolvere:

$$\begin{cases} x + 2y - 2z + 2w = 0 \\ 2x - y + 11z - 16w = 0 \end{cases}$$

e ricavando $x$ in funzione di $w, z$ (prima equazione + doppio della seconda, tutto diviso 5) otteniamo:

$$x = -4z + 6w$$

e ricavando $y$ in funzione di $w, z$ (doppio della prima eq. meno la seconda, tutto diviso 5) otteniamo

$$y = 3z - 4w$$

quindi una base delle soluzioni è data da: $v_1 = (-4, 3, 1, 0)$ (ottenuto per $z = 1, w = 0$) e $v_2 = (6, -4, 0, 1)$ (ottenuto per $z = 0, w = 1$) che sono chiaramente indipendenti, come si può notare considerando le ultime due coordinate .

Per ricavare il sottoinsieme $V$ di $M$ ortogonale al vettore $f = (1, 1, 0, -1)$ notiamo che $(v_1, f) = -1$ e $(v_2, f) = 1$. Di conseguenza se cerchiamo i vettori di $M$ che hanno prodotto scalare 0 con $f$, cerchiamo le combinazioni $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ di $v_1$ e $v_2$ che hanno prodotto 0 con $f$. Quindi vogliamo risolvere

$$(v, f) = 0$$

e sostituendo otteniamo:

$$(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, f) = 0$$

e per il calcolo fatto prima

$$-\lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

cioé $\lambda_1 = \lambda_2$. Quindi lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1 e una sua base è fatta di un'unico vettore e possiamo scegliere (prendiamo $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1$)

$$v_3 = v_1 + v_2 = (2, -1, 1, 1).$$

Si poteva altrimenti procedere tramite metodo di eliminazione di Gauss come fatto nella versione B.

**Esercizio 4.** Studiare il grafico di $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{xe^{2x}}$ determinando:
(i) le zone di crescenza/decrescenza; (ii) massimi e minimi locali; (iii) le zone di concavità/convessità; (iv) eventuali asintoti.
**Soluzione**.

Il dominio di $f$ è dato $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$. Si calcolano i limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \text{"}\frac{-2}{0+}\text{"} = -\infty; \quad \lim_{x\to 0-} f(x) = \text{"}\frac{-2}{0-}\text{"} = +\infty; \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = 0;$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+x-2}{x} e^{-2x} = \text{"} -\infty\text{"} * \text{"} +\infty\text{"} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+x-2}{x^2} e^{-2x} = 1 * \text{"} +\infty\text{"} = +\infty$$

Si conclude che (iv) $f$ ha un asintoto verticale in $x = 0$, uno orizzontale a $+\infty$ dato da $y = 0$ ed $f$ tende a $-\infty$ a $-\infty$ più velocemente di una qualsiasi retta (non ha nessun asintoto obliquo a $-\infty$).
La derivata è $f'(x) = -\dfrac{(2x+1)(x^2-2)}{x^2} e^{-2x}$ ed il suo segno da le informazioni:
(i) $f$ crescente su $(-\infty, -\sqrt{2})$; $f$ crescente su $(-1/2, 0)$, $f$ crescente su $(0, \sqrt{2})$;
$f$ decrescente su $(-\sqrt{2}, -1/2)$; $f$ decrescente su $(\sqrt{2}, +\infty)$.

(ii) $f$ ha un max locale in $x = \sqrt{2}$ che vale $f(\sqrt{2}) = e^{-2\sqrt{2}}$,$f$ ha un max locale in $x = -\sqrt{2}$ che vale $f(-\sqrt{2}) = e^{2\sqrt{2}}$, $f$ ha un min locale in $x = -1/2$ che vale $f(-1/2) = 9e/2$ .

La derivata seconda è

$$f''(x) = 4\frac{(x+1)(x^3-x^2-x-1)}{x^3} e^{-2x}.$$

che ha solo $x = -1$ come zero evidente. Per studiarne il segno rimane da studiare il segno della funzione $h(x) = x^3 - x^2 - x - 1$. Facendone la derivata si vede che $h$ ha un solo zero $\bar{x}$ compreso tra i punti $(1, 2)$ e che è negativa per $x < \bar{x}$ e positiva per $x > \bar{x}$. Mettendo insieme le informazioni sui segni di $x + 1, x^3, x^3 - x^2 - x - 1$ si deduce che
(iii) $f$ è convessa su $(-1, 0)$, $f$ è convessa su $(\bar{x}, +\infty)$, $f$ è concava su $(-\infty, -1)$, $f$ è concava su $(0, \bar{x})$.
In particolare $-1$ il punto di flesso tra il punto $-\sqrt{2}$ di max locale ed il punto $-1/2$ di minimo locale e $\bar{x}$ è il punto di flesso successivo al punto $\sqrt{2}$ massimo locale. Si ottiene infatti che $\bar{x}$ è sicuramente più grande di $\sqrt{2}$ in quanto $h(\sqrt{2}) = \sqrt{2} - 3$ è negativo. Per stimare meglio il valore di $\bar{x}$ si può applicare il metodo di bisezione (che permette di approssimare gli zeri di una funzione dividendo ogni volta in due l'intervallo e calcolando il segno del punto di mezzo all'intervallo).

**Compito di Istituzioni di Matematica 1**
**Seconda parte, Tema B**
3 luglio 2017

| COGNOME: | NOME: | MATR.: |
|---|---|---|

**Esercizio 1.** Supponiamo di poter scrivere utilizzando un alfabeto di $n$ lettere.

(1) Quante parole di lunghezza $k$ si possono costruire?
(2) Quante parole di lunghezza $k$ si possono scrivere senza usare due volte la stessa lettera in una parola?
(3) Quante parole di lunghezza $k$ si possono scrivere senza avere due lettere consecutive uguali?
(4) Se si scelgono un certo numero $m$ di prefissi lunghi 3 lettere, quante sono le parole di lunghezza $k$ che non iniziano con nessuno di questi prefissi?

**Soluzione:**

(1) Avendo a disposizione $n$ lettere, senza condizioni sulle loro ripetizioni, per ognuna delle $k$ posizioni della parola si può scegliere tra $n$ lettere distinte. Quindi in totale si hanno $n^k$ parole.
(2) Se non si possono ripetere le lettere, dobbiamo contare le combinazionidi $k$ lettere in un insiene di $n$, ovvero $n!/(n-k)!$.
(3) Se due lettere consecutive non possono essere uguali, possiamo scegliere la prima lettera in $n$ modi, la seconda in $n-1$ modi e anche tutte le successive lettere in $n-1$ modi perché ciascuna deve essere diversa dalla precedente, quindi in totale $n \cdot (n-1)^{(k-1)}$ parole.
(4) Fissato uno degli $m$ prefissi, rimangono a disposizione $k-3$ lettere per formare la parola, ovvero $n^{k-3}$ parole. Questo per ciascun prefisso, quindi moltiplicando per il numero di prefissi di 3 lettere otteniamo in totale $mn^{k-3}$ parole che iniziano con uno di questi prefissi. Dunque le parole di $k$ lettere che non iniziano con nessuno degli $m$ prefissi sono $n^k - mn^{k-3} = (n^3 - m)n^{k-3}$.

**Esercizio 2.**
(a) Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y' + 2x^3 + 2xy = 0$;
(b) Determinare la soluzione dell'equazione differenziale $y' = x^3y^3 + xy$ tale che $y(0) = 1$.

**Soluzione**. (a) Come primo passo si calcola la soluzione generale $v$ dell'equazione omogenea $v' + 2xv = 0$ che è data da $v(x) = Ce^{-x^2}$ al variare di $C \in \mathbb{R}$. Cerco poi una soluzione particolare dell'equazione di partenza della forma $y(x) = g(x)v(x)$ con $g$ da determinare. Derivando si ha che $g$ deve risolvere l'equazione $g'(x)v(x) = -2x^3$, ossia, scelto ad esempio $C = 1$, $g'(x) = -2x^3e^{x^2}$. Integrando nella variabile $t = x^2$ e poi per parti si ha $g(x) = (1 - x^2)e^{x^2}$, da cui una soluzione particolare $y_p$ di $y' + 2x^3 - 2xy = 0$ $y_p(x) = 1 - x^2$. La soluzione generale cercata $y$ si ottiene sommando a $y_p$ una qualsiasi soluzione dell'omogenea, da cui

$$y(x) = 1 - x^2 + Ce^{-x^2}$$

definita per ogni $x \in \mathbb{R}$.

(b) E' un'equazione di Bernoulli di esponente $\alpha = 3$ e con dato iniziale non nullo per cui divido tutto per $y^3$ ed ottengo $\frac{y'}{y^3} = x^3 + x\frac{1}{y^2}$. Faccio poi il cambio di variabile $u(x) = y^{1-\alpha}(x) = 1/y^2(x)$ e derivando $u$ si ottiene

$$u' = (-2)\frac{y'}{y^3} = (-2)(x^3 + x\frac{1}{y^2}) = -2x^3 - 2xu$$

con la condizione iniziale $u(0) = 1/y^2(0) = 1$. Usando il punto (a) si ha che $u(x) = 1 - x^2 + Ce^{-x^2}$ con $C$ da determinare in modo tale che $u(0) = 1$. Si ha $C = 0$ e quindi la soluzione cercata $y(x)$ verifica

$$y^2(x) = \frac{1}{u(x)} = \frac{1}{1 - x^2}.$$

Usando la condizione $y(0) = 1$ si deduce che è necessario scegliere la radice positiva dell'equazione sopra ossia

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Si noti che in questo caso $y$ ha dominio massimale di esistenza $(-1, 1)$.

**Esercizio 3.** Si determini l'insieme $M$ di tutte le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 4x + 3y + 22z - 12w = 0 \\ x + 2y - 2z + 2w = 0 \\ 3x + y + 24z - 14w = 0 \end{cases}$$

individuandone una base. Determinare poi il sottoinsieme $V$ dei vettori di $M$ che sono ortogonali al vettore di coordinate $(1, 1, 2, -1)$, determinando anche in questo caso una base di $V$.

**Soluzione**. Si può direttamente procedere con il metodo di Gauss e passare a sistemi equivalenti sommando le colonne moltiplicate per scalari. Spostando la seconda equazione al primo posto, moltiplicandola per 4 e sottraendola alla prima, moltiplicandola per 3 e sottraendola alla terza si ha

$$\begin{cases} x + 2y - 2z + 2w = 0 \\ -5y + 30z - 20w = 0 \\ -5y + 30z - 20w = 0 \end{cases}$$

La terza equazione è superflua, dalla seconda si ottiene $y = 6z - 4w$, sostituendo $y$ nella prima si ha poi $x = -10z + 6w$. Poichè le variabili $x, y$ sono state ricavate in funzione di $z, w$ si ha che

$$M = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = -10z + 6w \; y = 6z - 4w, z, w \in \mathbb{R}\}.$$

Per trovare una base basta quindi assegnare valori a $w$ e $z$: una base di $M$ è data da $v_1 = (-10, 6, 1, 0)$ (ottenuto per $z = 1, w = 0$) e $v_2 = (6, -4, 0, 1)$ (ottenuto per $z = 0, w = 1$) che sono chiaramente indipendenti, come si può notare considerando le ultime due coordinate .

Posto $f = (1, 1, 2, -1)$, si ha che $V = \{v = (x, y, z, w) \in M : (v, f) = 0\}$. Questo equivale ad aggiungere l'equazione $x+y+2z-w = 0$ al sistema iniziale. Una possibilità è usare in questa ultima equazione il fatto che i vettori di $M$ verificano le equazioni $x = -10z + 6w$ e $y = 6z - 4w$ con $z, w$ variabili libere. Si ottiene quindi una equazione solo in $z$ e $w$ data da $-2z + w = 0$, ossia $w = 2z$. Mettendo insieme le condizioni sui vettori di $V$ si ha

$$\begin{aligned} V &= \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = -10z + 6w, \; y = 6z - 4w, \; w = 2z, \; z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = 2z, \; y = -2z, \; w = 2z, \; z \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Una sua base è fatta di un'unico vettore $v_3 = (2, -2, 1, 2)$ determinato prendendo $z = 1$.

**Esercizio 4.** Studiare il grafico di $f(x) = \dfrac{(x^2+x-2)e^{2x}}{x+1}$ determinando:
(i) le zone di crescenza/decrescenza; (ii) massimi e minimi locali; (iii) le zone di concavità/convessità; (iv) eventuali asintoti.

**Soluzione**.

Il dominio di $f$ è dato $\{x \in \mathbb{R} : x \neq -1\}$. Si calcolano i limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to -1+} f(x) = \text{"}\frac{-2}{0+}\text{"} = -\infty; \quad \lim_{x\to -1-} f(x) = \text{"}\frac{-2}{0-}\text{"} = +\infty; \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = 0;$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+x-2}{x+1} e^{2x} = \text{"}+\infty\text{"} * \text{"}+\infty\text{"} = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+x-2}{x(x+1)} e^{2x} = 1 * \text{"}+\infty\text{"} = +\infty$$

Si conclude che (iv) $f$ ha un asintoto verticale in $x = -1$, uno orizzontale a $-\infty$ dato da $y = 0$ ed $f$ tende a $+\infty$ a $+\infty$ più velocemente di una qualsiasi retta (non ha nessun asintoto obliquo a $+\infty$).

La derivata è $f'(x) = \dfrac{(2x+1)(x^2+2x-1)}{(x+1)^2} e^{2x}$ ed il suo segno da le informazioni:
(i) $f$ crescente su $(-1-\sqrt{2}, -1)$; $f$ crescente su $(-1, -1/2)$,
$f$ crescente su $(\sqrt{2}-1, +\infty)$;
$f$ decrescente su $(-\infty, -1-\sqrt{2})$; $f$ decrescente su $(-1/2, \sqrt{2}-1)$.

(ii) $f$ ha un min locale in $x = -1-\sqrt{2}$ che vale $f(-1-\sqrt{2}) = -e^{-\sqrt{2}-1}$,$f$ ha un min locale in $x = \sqrt{2}-1$ che vale $f(\sqrt{2}-1) = -e^{\sqrt{2}-1}$, $f$ ha un max locale in $x = -1/2$ che vale $f(-1/2) = -9/2e$ .

La derivata seconda è

$$f''(x) = 4\frac{x(x^3+4x^2+4x+2)}{(x+1)^3} e^{-2x}.$$

che ha solo $x = 0$ come zero evidente. Per studiarne il segno rimane da studiare il segno della funzione $h(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 2$. Facendone la derivata si vede che $h$ ha un solo zero $\bar{x}$ compreso tra i punti $(-2, -3)$ e che è negativa per $x < \bar{x}$ e positiva per $x > \bar{x}$. Mettendo insieme le informazioni sui segni di $x+1, x^3, x^3+4x^2+4x+2$ si deduce che (iii) $f$ è convessa su $(-1-\sqrt{2}, -1)$, $f$ è convessa su $(0, +\infty)$, $f$ è concava su $(-\infty, \bar{x})$, $f$ è concava su $(-1, 0)$.

In particolare 0 è il punto di flesso tra il punto $-1/2$ di max locale ed il punto $\sqrt{2}-1$ di minimo locale e $\bar{x}$ è il punto di flesso successivo al punto $-1-\sqrt{2}$ di minimo locale. Si ottiene infatti che $\bar{x}$ è sicuramente più grande di $-1-\sqrt{2}$ in quanto $h(\sqrt{2}) = 3-\sqrt{2}$ è negativo. Per stimare meglio il valore di $\bar{x}$ si può applicare il metodo di bisezione (che permette di approssimare gli zeri di una funzione dividendo ogni volta in due l'intervallo e calcolando il segno del punto di mezzo all'intervallo).