Compito di Ist. Mat. 1, Seconda parte, Tema XY

12 gennaio 2018

COGNOME:	NOME:	MATR.:

Esercizio 1. Si consideri l'applicazione lineare $T \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita da

$$T(x_1, x_2, x_3) = (2kx_1 - x_2, x_2 + kx_3, x_1 + x_2 - x_3, -x_1 + (k+1)x_3).$$

a) Trovare al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ la dimensione del nucleo e dell'immagine di T;
b) per $k = 0$ determinare una base del nucleo di T;
c) dire se per $k = 1$ l'applicazione T è iniettiva;
d) stabilire per quali valori di k il vettore $v = (3, 3, 1, 0)$ appartiene all'immagine di T.

Soluzione. a) La matrice associata all'applicazione lineare è

$$T = \begin{pmatrix} 2k & -1 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & k+1 \end{pmatrix}$$

ed il suo rango è uguale ad 3 per $k \neq 0, -3/2$ ed uguale a 2 per $k = 0, -3/2$. Poichè la dimensione dello spazio di partenza è 3 se ne deduce che $\dim(Im(T)) = 2$ e $\dim(Ker(T)) = 1$ per $k = 0, -3/2$ e $\dim(Im(T)) = 3$, $\dim(Im(T)) = 0$ per $k \neq 0, -3/2$.

b) Per $k = 0$ il sistema di equazioni relative a $T(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$ fornisce le condizioni $x_2 = 0$, $x_3 = x_1$ per cui una base è formata ad esempio dal vettore $(1, 0, 1)$.

c) Per $k = 1$ il nucleo è composto dal solo vettore nullo per cui T è iniettiva.

d) Mi riduco a calcolare il rango della matrice completa del sistema

$$C = \begin{pmatrix} 2k & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & k & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & k+1 & 0 \end{pmatrix}$$

Essendo una matrice 4×4 ha rango massimo, 4, quando il suo determinante è diverso da 0. Lo calcolo sviluppando rispetto all'ultima riga ed ottengo $det(C) = 2k(2k + 3)$. Per $k \neq 0, -3/2$ si ha quindi che il rango di C è 4 che è strettamente maggiore del rango della matrice, uguale a 3, per cui il vettore dato non appartiene al'immagine di T. Per $k = 0, -3/2$ la matrice di partenza ha rango 2 per il conto fatto al punto a). Rimane da vedere se la matrice completa ha rango 3 o 2. Per $k = 0, -3/2$ la matrice C é data da

$$C_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C_{-3/2} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

nel primo caso il rango è 3 (basta cancellare prima colonna ed ultima riga) per cui anche in questo caso il vettore $(3, 3, 1, 0)$ non appartiene all'immagine di T (oppure si poteva vedere che le prime due equazioni sono incompatibili). Per $k = -3/2$ invece si risolve facilmente il sistema ottenendo che il vettore $(-3, 6, 2)$ risolve il sistema $T(x_1, x_2, x_3) = (3, 3, 1, 0)$.

Esercizio 2.

a) Calcolare

$$\int_{-2}^{1} \frac{|x+1|}{x^2+x-6}\, dx$$

b) Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ è finito

$$\int_{3}^{+\infty} \frac{|x+1|}{(x^2+x-6)^\alpha}\, dx$$

Soluzione. a) Si ha $x^2+x-6 = (x+3)(x-2)$ per cui il denominatore non si annulla su $[-2, 1]$ e la funzione data è integrabile su $[-2, 1]$ visto che è continua. Poichè $|x+1| = x+1$ su $[-1, +\infty)$ e $|x+1| = -x-1$ su $(-\infty, -1]$ si può scrivere

$$\int_{-2}^{1} \frac{|x+1|}{x^2+x-6}\, dx = -\int_{-2}^{-1} \frac{x+1}{x^2+x-6}\, dx + \int_{-1}^{1} \frac{x+1}{x^2+x-6}\, dx.$$

Rimane da calcolare una primitiva $h(x)$ di $(x+1)/(x^2+x-6)$. Si ha

$$\frac{x+1}{x^2+x-6} = \frac{2}{5}\Big(\frac{1}{x+3}\Big) + \frac{3}{5}\Big(\frac{1}{x-2}\Big),$$

da cui

$$\int \frac{|x+1|}{x^2+x-6}\, dx = \frac{2}{5}\ln(|x+3|) + \frac{3}{5}\ln(|x-2|) + c = h(x)$$

e

$$\int_{-2}^{1} \frac{|x+1|}{x^2+x-6}\, dx = -h(x)|_{-2}^{-1} + h(x)|_{-1}^{1} = \frac{6}{5}\ln\Big(\frac{2}{3}\Big).$$

b) Su $(3, +\infty)$ si ha $|x+1| = x+1$ e la funzione x^2+x-6 è sempre strettamente positiva, oltre che continua. Per stimare il suo integrale in senso improprio si può fare il confronto con la funzione $\dfrac{1}{x^{2\alpha-1}}$ e si ottiene che l'integrale esiste finito se e solo se $\alpha > 1$.

Esercizio 3.

(1) Determinare al variare di $\beta \in \mathbb{R}$ la soluzione di

$$y'(x) = e^{-2y(x)} e^{2x} \quad \text{tale che } \; y(0) = \beta.$$

(2) Per $\beta = 1$ trovare il dominio della soluzione e determinare esistenza e valore di eventuali asintoti della funzione soluzione.

Soluzione. (1)Si tratta di una equazione a variabili separabili. Per ogni punto iniziale $y(0) = \beta$ il termine $e^{y(0)}$ non si annulla mai per cui si può riscrivere

$$e^{2y}\, dy = e^{2x}\, dx$$

ed integrare ottenendo

$$\frac{e^{2y}}{2} = \frac{e^{2x}}{2} + c$$

al variare della costante $c \in \mathbb{R}$, da cui $2y(x) = \ln(e^{2x} + c')$ per un'opportuna costante $c' \in \mathbb{R}$. Imponendo il dato iniziale si ha che la soluzione cercata è

$$y(x) = \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + e^{2\beta} - 1).$$

(2) Il dominio della soluzione tale che $y(0) = 1$ è dato da

$$\{x \in \mathbb{R} \,:\, e^{2x} > 1 - e^2\} = \mathbb{R},$$

dato che $1 - e^2 < 0$. Si ha poi

$$\lim_{x\to-\infty} y(x) = \frac{1}{2} \ln(e^2 - 1), \; \lim_{x\to+\infty} y(x) = +\infty, \; \lim_{x\to+\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(e^{2x} + e^2 - 1)}{2x} = \frac{+\infty}{+\infty}.$$

Usando l'Hopital si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2e^{2x}}{2(e^{2x} + e^2 - 1)} = 1$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} (y(x) - x) = \lim_{x\to+\infty} (y(x) - \frac{1}{2} \ln(e^{2x})) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2} \ln\left(\frac{e^{2x} + e^2 - 1}{e^{2x}}\right) = 0$$

Si conclude che $y(x)$ ha l'asintoto orizzontale $y = \ln(e^2 - 1)/2$ a $-\infty$ e l'asintoto obliquo $y = 2x$ a $+\infty$.

Compito di Ist. Mat. 1, Seconda parte, Tema ZW

12 gennaio 2018

COGNOME:	NOME:	MATR.:

Esercizio 1. Si consideri l'applicazione lineare $T \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita da

$$T(x_1, x_2, x_3) = (-2kx_1 - x_2, x_2 - kx_3, -x_1 + (1-k)x_3, x_1 + x_2 - x_3).$$

a) Trovare al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ la dimensione del nucleo e dell'immagine di T;
b) per $k = 0$ determinare una base del nucleo di T;
c) dire se per $k = -1$ l'applicazione T è iniettiva;
d) stabilire per quali valori di k il vettore $v = (3, 3, 0, 1)$ appartiene all'immagine di T.

Soluzione. Del tutto analoga alla precedente.

Esercizio 2.

a) Calcolare

$$\int_{-1}^{3} \frac{|x-1|}{x^2-2x-8}\, dx$$

b) Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ è finito

$$\int_{6}^{+\infty} \frac{|x-1|}{(x^2-2x-8)^\alpha}\, dx$$

Soluzione. a) Si ha $x^2-2x-8=(x-4)(x+2)$ per cui il denominatore non si annulla su $[-1,3]$ e la funzione data è integrabile su $[-1,3]$ visto che è continua. Poichè $|x-1|=x-1$ su $[1,+\infty)$ e $|x+1|=1-x$ su $(-\infty,1]$ si può scrivere

$$\int_{-1}^{3} \frac{|x-1|}{x^2-2x-8}\, dx = \int_{-1}^{1} \frac{1-x}{x^2-2x-8}\, dx + \int_{1}^{3} \frac{x-1}{x^2-2x-8}\, dx.$$

Rimane da calcolare una primitiva $h(x)$ di $(x-1)/(x^2-2x-8)$. Si ha

$$\int \frac{x-1}{x^2-2x-8}\, dx = \frac{1}{2}\ln(|x^2-2x-8|)+c = h(x)$$

e

$$\int_{-1}^{3} \frac{|x-1|}{x^2-2x-8}\, dx = -h(x)|_{-1}^{1} + h(x)|_{1}^{3} = \ln(5)-2\ln(3) = \ln\left(\frac{5}{9}\right).$$

b) Su $(6,+\infty)$ si ha $|x-1|=x-1$ e la funzione x^2-2x-8 è sempre strettamente positiva, oltre che continua. Per stimare il suo integrale in senso improprio si può fare il confronto con la funzione $\dfrac{1}{x^{2\alpha-1}}$ e si ottiene che l'integrale esiste finito se e solo se $\alpha > 1$.

Esercizio 3.

(1) Determinare al variare di $\beta \in \mathbb{R}$ la soluzione di

$$y'(x) = e^{3y(x)} e^{3x} \qquad \text{tale che} \;\; y(0) = \beta.$$

(2) Per $\beta = 1$ trovare il dominio della soluzione e determinare esistenza e valore di eventuali asintoti della funzione soluzione.

Soluzione. (1)Si tratta di una equazione a variabili separabili. Per ogni punto iniziale $y(0) = \beta$ il termine $e^{y(0)}$ non si annulla mai per cui si può riscrivere

$$e^{-3y}\, dy = e^{3x}\, dx$$

ed integrare ottenendo

$$\frac{-e^{-3y}}{3} = \frac{e^{3x}}{3} + c$$

al variare della costante $c \in \mathbb{R}$, da cui $-3y(x) = \ln(c' - e^{3x})$ per un'opportuna costante $c' \in \mathbb{R}$. Imponendo il dato iniziale si ha che la soluzione cercata è

$$y(x) = -\frac{1}{3} \ln(e^{-3\beta} + 1 - e^{3x}).$$

(2) Il dominio della soluzione tale che $y(0) = 1$ è dato da

$$\{x \in \mathbb{R} \,:\, e^{3x} < e^{-3} + 1\} = (-\infty, \frac{1}{3} \ln(e^{-3} + 1)).$$

Si ha

$$\lim_{x \to -\infty} y(x) = -\frac{1}{3} \ln(e^{-3} + 1), \qquad \lim_{x \to \ln(e^{-3}+1)/3} y(x) = +\infty.$$

Si conclude che $y(x)$ ha l'asintoto orizzontale $y = -\ln(e^{-3} + 1)/3$ a $-\infty$ e l'asintoto verticale $x = \dfrac{1}{3} \ln(e^{-3} + 1)$.