

**Compito di Istituzioni di Matematica 1**  
**Prima parte, Tema ALFA**  
6 settembre 2017

COGNOME:	NOME:	MATR.:
----------	-------	--------

1) L'applicazione lineare  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  data da

$$f(x, y, z) = (x - kz, 3x + 2y + z, x + z, 2x + y + z)$$

è iniettiva

A: sempre;    B: mai;    C: per  $k \neq -1$     D: per  $k \neq 0$ ;    E: N.A.

2) I vettori  $v = (2, 2, \lambda, -1)$  e  $w = (\lambda, 1, \lambda, 1)$  sono ortogonali:

A: sempre;    B: per  $\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$ ;    C: N.A.;    D: per nessun  $\lambda \in \mathbb{R}$ ;    E: per  $\lambda = -1$ .

3) La funzione  $y = 1 - e^{-x^2}$  definita per  $x \in \mathbb{R}$  è

A: iniettiva;    B: limitata;    C: convessa;    D: N.A.;    E: concava.

4) La derivata della funzione  $\cos(\pi \cos(\sin(x)))$  in  $x = 0$  è uguale a

A:  $-\pi/2$ ;    B:  $\pi$ ;    C: 0;    D:  $-1$ ;    E: N.A.

5) Tirando 3 volte di seguito un dado a 6 facce quanti sono i casi in cui si ottengono tre valori tutti diversi tra loro:

A: 120;    B: 216;    C: N.A.    D: 20;    E: 6.

6) L'equazione  $z^3 = -8$

A: ha infinite soluzioni;    B: N.A.;    C: non ha soluzioni reali;

D: ha due soluzioni con parte reale 1;    E: ha una soluzione con parte reale  $\sqrt{3}$ .

7) Il valore dell'integrale  $\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{x^4 + 1}} dx$  è

A: 0;    B:  $-1$ ;    C:  $1/2$ ;    D: 1;    E: N.A.

8) Il dominio della funzione  $f(x) = \ln(x^2 - 3)$  è dato dagli  $x$  tali che

A:  $x \leq \sqrt{3}$ ;    B:  $x > -\sqrt{3}$ ;    C:  $|x| < \sqrt{3}$     D:  $|x| > \sqrt{3}$ ;    E: N.A.

	1	2	3	4	5	6	7	8
<b>RISPOSTE</b>								

**Compito di Istituzioni di Matematica 1**  
**Prima parte, Tema BETA**  
6 settembre 2017

COGNOME:	NOME:	MATR.:
----------	-------	--------

1) L'applicazione lineare  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  data da

$$f(x, y, z) = (x - kz, 3x + 2y + z, x + z, 2x + y + 2z)$$

è iniettiva

A: sempre;    B: mai;    C: per  $k \neq -1$     D: per  $k \neq 0$ ;    E: N.A.

2) I vettori  $v = (1, 2, \lambda, -1)$  e  $w = (\lambda, 1, \lambda, 1)$  sono ortogonali:

A: sempre; B: per  $\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$ ; C: N.A.; D: per nessun  $\lambda \in \mathbb{R}$ ; E: per  $\lambda = \sqrt{-3}$ .

3) La funzione  $y = e^{-x^2}$  definita per  $x \in \mathbb{R}$  è

A: convessa;    B: concava;    C: limitata;    d: N.A.;    E: iniettiva.

4) La derivata della funzione  $\sin(\pi \cos(\sin(x)))$  in  $x = 0$  è uguale a

A:  $-\pi$ ;    B: 0;    C: 1;    D:  $-\pi/2$ ;    E: N.A.

5) Tirando 4 volte di seguito un dado a 6 facce quanti sono i casi in cui si ottengono quattro valori tutti diversi tra loro:

A: 20;    B: 360;    C: N.A.    D: 15;    E: 6.

6) L'equazione  $z^3 = 8$

A: ha infinite soluzioni;    B: N.A.;    C: non ha soluzioni reali;

D: ha due soluzioni con parte reale 1;    E: ha una soluzione con parte reale  $\sqrt{3}$ .

7) Il valore dell'integrale  $\int_0^{\pi/4} \frac{\cos(x)}{(\sin(x) + 1)^2} dx$  è

A:  $2(\sqrt{2} + 1)$ ;    B:  $\sqrt{2} + 1$ ;    C:  $1/2$ ;    D: N.A.;    E:  $\sqrt{2} - 1$

8) Il dominio della funzione  $f(x) = \ln(2 - x^2)$  è dato dagli  $x$  tali che

A:  $x \leq \sqrt{2}$ ;    B:  $x > -\sqrt{2}$ ;    C:  $|x| < \sqrt{2}$     D:  $|x| > \sqrt{2}$ ;    E: N.A.

	1	2	3	4	5	6	7	8
<b>RISPOSTE</b>								

**Compito di Istituzioni di Matematica 1**  
**Prima parte, Tema GAMMA**  
6 settembre 2017

COGNOME:	NOME:	MATR.:
----------	-------	--------

1) L'applicazione lineare  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  data da

$$f(x, y, z) = (x - kz, 3x + 2y + z, x + z, 2x + y + z)$$

è iniettiva

A: sempre;    B: mai;    C: per  $k \neq -1$     D: per  $k \neq 0$ ;    E: N.A.

2) I vettori  $v = (1, 2, \lambda, -1)$  e  $w = (\lambda, 1, \lambda, 1)$  sono ortogonali:

A: sempre;    B: per  $\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$ ;    C: N.A.;    D: per nessun  $\lambda \in \mathbb{R}$ ;    E: per  $\lambda = \sqrt{-3}$ .

3) La funzione  $y = e^{-x^2}$  definita per  $x \in \mathbb{R}$  è

A: convessa;    B: concava;    C: limitata;    D: N.A.;    E: iniettiva.

4) La derivata della funzione  $\cos(\pi \cos(\sin(x)))$  in  $x = 0$  è uguale a

A:  $-\pi/2$ ;    B:  $\pi$ ;    C: 0;    D:  $-1$ ;    E: N.A.

5) Tirando 3 volte di seguito un dado a 6 facce quanti sono i casi in cui si ottengono tre valori tutti diversi tra loro:

A: 20;    B: 6;    C: N.A.    D: 120;    E: 216.

6) L'equazione  $z^3 = -8$

A: ha infinite soluzioni;    B: N.A.;    C: non ha soluzioni reali;

D: ha due soluzioni con parte reale 1;    E: ha una soluzione con parte reale  $\sqrt{3}$ .

7) Il valore dell'integrale  $\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{x^4 + 1}} dx$  è

A: 0;    B:  $-1$ ;    C:  $1/2$ ;    D: 1;    E: N.A.

8) Il dominio della funzione  $f(x) = \ln(2 - x^2)$  è dato dagli  $x$  tali che

A:  $x \leq \sqrt{2}$ ;    B:  $x > -\sqrt{2}$ ;    C:  $|x| < \sqrt{2}$     D:  $|x| > \sqrt{2}$ ;    E: N.A.

	1	2	3	4	5	6	7	8
<b>RISPOSTE</b>								

**Compito di Istituzioni di Matematica 1**  
**Prima parte, Tema DELTA**  
6 settembre 2017

COGNOME:	NOME:	MATR.:
----------	-------	--------

1) L'applicazione lineare  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  data da

$$f(x, y, z) = (x - kz, 3x + 2y + z, x + z, 2x + y + 2z)$$

è iniettiva

A: sempre;    B: mai;    C: per  $k \neq -1$     D: per  $k \neq 0$ ;    E: N.A.

2) I vettori  $v = (2, 2, \lambda, -1)$  e  $w = (\lambda, 1, \lambda, 1)$  sono ortogonali:

A: sempre; B: per  $\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$ ; C: N.A.; D: per nessun  $\lambda \in \mathbb{R}$ ; E: per  $\lambda = -1$ .

3) La funzione  $y = 1 - e^{-x^2}$  definita per  $x \in \mathbb{R}$  è

A: iniettiva; B: limitata; C: convessa; D: N.A.; E: concava.

4) La derivata della funzione  $\sin(\pi \cos(\sin(x)))$  in  $x = 0$  è uguale a

A:  $-\pi$ ;    B: 0;    C: 1;    D:  $-\pi/2$ ;    E: N.A.

5) Tirando 4 volte di seguito un dado a 6 facce quanti sono i casi in cui si ottengono quattro valori tutti diversi tra loro:

A: 20;    B: 6;    C: 15;    D: N.A.;    E: 360.

6) L'equazione  $z^3 = 8$

A: ha infinite soluzioni;    B: N.A.;    C: non ha soluzioni reali;

D: ha due soluzioni con parte reale 1;    E: ha una soluzione con parte reale  $\sqrt{3}$ .

7) Il valore dell'integrale  $\int_0^{\pi/4} \frac{\cos(x)}{(\sin(x) + 1)^2} dx$  è

A:  $2(\sqrt{2} + 1)$ ;    B:  $\sqrt{2} + 1$ ;    C:  $1/2$ ;    D: N.A.;    E:  $\sqrt{2} - 1$ .

8) Il dominio della funzione  $f(x) = \ln(x^2 - 3)$  è dato dagli  $x$  tali che

A:  $x \leq \sqrt{3}$ ;    B:  $x > -\sqrt{3}$ ;    C:  $|x| < \sqrt{3}$     D:  $|x| > \sqrt{3}$ ;    E: N.A.

	1	2	3	4	5	6	7	8
<b>RISPOSTE</b>								

Compito di Istituzioni di Matematica 1–Seconda parte, Tema A

6 settembre 2017

COGNOME:	NOME:	MATR.:
----------	-------	--------

**Esercizio 1.**

Al variare di  $t \in \mathbb{R}$  consideriamo l'applicazione lineare  $f_t : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 \\ x_1 + x_2 + (t+1)x_4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + (t+3)x_4 \end{pmatrix}$$

- (1) Scrivere la matrice  $M_t$  associata ad  $f$  e calcolarne il rango al variare di  $t$ ;
- (2) calcolare la dimensione del nucleo di  $f_t$  e dell'immagine di  $f_t$ ;
- (3) al variare di  $t$  dire se esistono e quante sono le soluzioni dell'equazione

$$f_t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

- (4) trovare lo spazio delle soluzioni per l'equazione sopra nel caso  $t = 1$ .

**Esercizio 2.**

- (a) Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale  $y' + \frac{x}{x^2 + 1}y + \frac{x}{(x^2 + 1)^2} = 0$ ;
- (b) Determinare poi la soluzione tale che  $\lim_{x \rightarrow +\infty} xy(x) = 1$ .

**Esercizio 3.**

- (1) Trovare una primitiva della funzione  $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$  che in  $x = -1$  valga  $2\sqrt{2}$ ;
- (2) Determinare l'area della porzione di piano delimitata dal grafico delle funzioni

$$f(x) \text{ e } g(x) = \frac{\sqrt{x+4} + 3}{(\sqrt{x+4} - 1)(x - 5)} \text{ ristrette agli } x \in [0, 2].$$

**Esercizio 4.** Determinare i numeri complessi soluzione dell'equazione

$$(|z|^2 + 2z^2 + 4\bar{z} + 1)(z^5 + 8) = 0.$$

Compito di Istituzioni di Matematica 1–Seconda parte, Tema B

6 settembre 2017

COGNOME:	NOME:	MATR.:
----------	-------	--------

**Esercizio 1.** Al variare di  $t \in \mathbb{R}$  consideriamo l'applicazione lineare  $f_t : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_3 + (t+2)x_4 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + (t+4)x_4 \end{pmatrix}$$

- (1) Scrivere la matrice  $M_t$  associata ad  $f$  e calcolarne il rango al variare di  $t$ ;
- (2) calcolare la dimensione del nucleo di  $f_t$  e dell'immagine di  $f_t$ ;
- (3) al variare di  $t$  dire se esistono e quante sono le soluzioni dell'equazione

$$f_t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix};$$

- (4) trovare lo spazio delle soluzioni dell'equazione sopra per  $t = 0$ .

**Esercizio 2.**

- (a) Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale  $y' + \frac{x}{x^2 + 1}y - \frac{x}{(x^2 + 1)^2} = 0$ ;
- (b) Determinare poi la soluzione tale che  $\lim_{x \rightarrow +\infty} xy(x) = 3$ .

**Esercizio 3.**

- (1) Trovare una primitiva della funzione  $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$  che in  $x = -1$  valga  $2\sqrt{3}$ ;
- (2) Determinare l'area della porzione di piano delimitata dal grafico delle funzioni

$$f(x) \text{ e } g(x) = \frac{\sqrt{x+4} + 3}{(\sqrt{x+4} - 1)(x - 5)} \text{ ristrette agli } x \in [0, 3].$$

**Esercizio 4.** Determinare i numeri complessi soluzione dell'equazione

$$(|z|^2 + 2z^2 + 4\bar{z} + 1)(z^5 + 8) = 0.$$