Soluzioni Prova scritta 08/01/2014

1) Sia $f(x,y)$ definita da $f(x,y) = |x+2|(1+x+y^2)$.

(a) Determinare il valore ed il campo di esistenza di $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$;

f è definita su tutto $\mathbb{R}^2$ e qui è continua;

dato che $|x+2| = \begin{cases} x+2 & \text{se } x \geq -2 \\ -x-2 & \text{se } x < -2 \end{cases}$ si ha

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+2)(1+x+y^2) & \text{se } (x,y) \text{ t.c. } x \geq -2 \\ -(x+2)(1+x+y^2) & \text{se } (x,y) \text{ t.c. } x < -2 \end{cases}.$$

Sui 2 aperti $A_1 = \{(x,y) : x > -2\}$ e $A_2 = \{(x,y) : x < -2\}$

la funzione coincide con un polinomio per cui è di classe C^∞

e risulta

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 3+2x+y^2 & \text{su } A_1 \\ -(3+2x+y^2) & \text{su } A_2 \end{cases}$$

Rimane da vedere se $\exists \frac{\partial f}{\partial x}$ nei punti della forma $(-2,y)$, $y \in \mathbb{R}$.

Si calcola facilmente

$$\lim_{\substack{x \to -2^+ \\ y \to \bar{y}}} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{\substack{x \to -2^+ \\ y \to \bar{y}}} (3+2x+y^2) = \bar{y}^2 - 1$$

$$\lim_{\substack{x \to -2^- \\ y \to \bar{y}}} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{\substack{x \to -2^- \\ y \to \bar{y}}} -(3+2x+y^2) = 1 - \bar{y}^2$$

Poiche'

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(-2+h,\bar{y}) - f(-2,\bar{y})}{h} = \lim_{\substack{x \to -2^+ \\ y \to \bar{y}}} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \bar{y}^2 - 1$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(-2+h,\bar{y}) - f(-2,\bar{y})}{h} = \lim_{\substack{x \to -2^- \\ y \to \bar{y}}} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 - \bar{y}^2$$

si ha che $\exists \frac{\partial f}{\partial x}(-2,\bar{y})$ se e solo se $\bar{y}^2-1 = 1-\bar{y}^2$

$\iff \bar{y}^2 = 1 \iff \bar{y} = \pm 1$

Se ne deduce che il campo di esistenza di $\frac{\partial f}{\partial x}$ è dato da
$A_1 \cup A_2 \cup \{(-2,-1),(-2,1)\}$.

Per quanto riguarda $\frac{\partial f}{\partial y}$ invece $y \mapsto f(x,y)$ è di classe C^∞ e si ha $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y|x+2|$ su tutto $\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ il campo di esistenza di $\frac{\partial f}{\partial y}$ è tutto $\mathbb{R}^2$.

(b) Determinare i punti in cui f è differenziabile;

Poiché $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ esistono e sono continue sugli aperti $A_1 \cup A_2$ per il teorema del differenziale totale si ha che f è differenziabile su $A_1 \cup A_2$. Rimangono da analizzare i punti $(-2,1)$ e $(-2,-1)$.

Dato che f è simmetrica rispetto all'asse x, si ha che f è differenziabile in $(-2,1) \iff f$ è differenziabile in $(-2,-1)$

Ci limitiamo allora a calcolare il limite per il pto $(-2,1)$:

$$\lim_{(x,y)\to(-2,1)} \frac{f(x,y)-f(-2,1)-\langle \nabla f(-2,1),(x+2,y-1)\rangle}{\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}}.$$

Si ha $f(-2,1)=0$ e $\frac{\partial f}{\partial x}(-2,1)=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(-2,1)=0$

Poiché $f(x,y) = |x+2|\,(1+x+y^2) = |x+2|\,(2+x+y^2-1)$ e

$$\left| \frac{|x+2|\,(2+x+y^2-1)}{\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}} \right| \leq \frac{|x+2| \cdot |x+2|}{\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}} + |x+2|\,|y+1| \cdot \frac{|y-1|}{\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}}$$

$$\leq |x+2| + |x+2|\,|y+1|$$

si ha $\lim\limits_{(x,y)\to(-2,1)} \dfrac{f(x,y)}{\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}} = 0 \implies f$ è differenziabile in

$(-2,1)$ e quindi anche in $(-2,-1)$.

(c) Calcolare massimo e minimo di f su

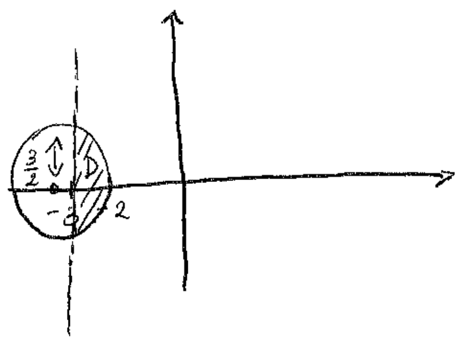
$$D = \{(x,y) : x^2+y^2+7x+10 \leq 0,\ x \geq -3\}.$$

Completando i quadrati la condizione $x^2+y^2+7x+10 \leq 0$

si riscrive come $\quad x^2+7x+\left(\frac{7}{2}\right)^2+y^2 \leq \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 10$

equivalente a $\quad \left(x+\frac{7}{2}\right)^2+y^2 \leq \frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$.

Se ne deduce che D consiste dei punti ottenuti dalla intersezione della palla di centro $\left(-\frac{7}{2},0\right)$ e di raggio $\frac{3}{2}$ ed il semispazio $x \geq -3$:



$\Rightarrow$ i punti $(x,y) \in D$ verificano $x \leq -2$

$\Rightarrow$ $f_{|D}$ si riscrive come $f_{|D}(x,y) = -(x+2)(1+x+y^2)$.

Poiche' D è chiuso e limitato ed f è continua su D f ammette sicuramente massimo e minimo su D.

I candidati ad essere punti di massimo e di minimo vanno ricercati sui punti stazionari di f che stanno nella parte interna di D oppure vanno ricercati su ∂D.

Poiche' $\nabla f(x,y) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = 2y\,|x+2| = 0$

che ha soluzioni $y = 0$ o $x = -2$ imponendo

$\frac{\partial f}{\partial x} = -(3+2x+y^2) = 0$ si ottengono le soluzioni

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} x = -2 \\ y = \pm 1 \end{cases}$$

I punti $(-2,1)$, $(-2,-1)$, $(-\frac{3}{2},0)$ però non appartengono a D $\Rightarrow$ i pti di massimo e minimo vanno ricercati su ∂D

$$\partial D = \underbrace{\{(x,y) : x^2+y^2+7x+10 \leq 0 \text{ e } x = -3\}}_{\Gamma_1} \cup \underbrace{\{(x,y) : x^2+y^2+7x+10 = 0 \text{ e } x \geq -3\}}_{\Gamma_2}$$

$f_{|\Gamma_1}$ è uguale a $f(-3,y) = -2+y^2$

i punti y di Γ_1 verificano $x^2+y^2+7x+10 \le 0$ con $x=-3$

$\Rightarrow \quad y^2 \le 2 \quad \Rightarrow \quad \max_{\Gamma_1} f = 0 \ , \ \min_{\Gamma_1} f = -2$

Vediamo gli estremi che troviamo su Γ_2.

$f_{|\Gamma_2}$ si può riscrivere usando l'eq. $x^2+y^2+7x+10=0$

come $\quad f_{|\Gamma_2}(x,y) = -(1+x-x^2-7x-10)(x+2) = (x^2+6x+9)(x+2)$

da studiare per $-3 \le x \le -2$ (vedere disegno di D).

$(x^2+6x+9)(x+2) = x^3+8x^2+21x+18$ che negli estremi dell'intervallo $[-3,-2]$ vale 0. Annullando la derivata prima si ottiene $3x^2+16x+21=0$ che ha soluzioni

$x=-3$ e $x=-\frac{7}{3} \quad \Rightarrow \quad \max_{\Gamma_2} f = 0$ e $\min_{\Gamma_2} f = -\frac{4}{27}$

Riassumendo si ottiene $\quad \max_{D} f = 0 \ , \ \min_{D} f = -2$

2) Sia $E \subseteq \mathbb{R}^2$ l'insieme compreso tra l'asse delle x ed il sostegno della curva

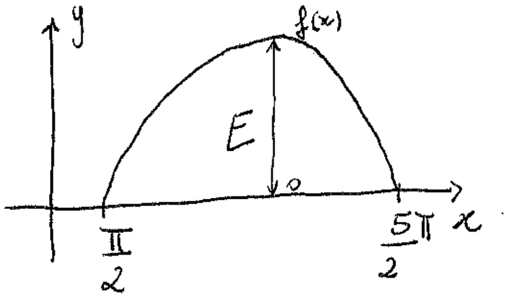
$$\gamma(t) = (2t, \sin(t) - \cos(t)) \qquad t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi\right].$$

Calcolare $\displaystyle\iint_E (x-2y)\,dx\,dy$.

Utilizzando la parametrizzazione $2t = s$ il sostegno della curva γ può essere visto come grafico della funzione

$$f(s) = \sin\left(\frac{s}{2}\right) - \cos\left(\frac{s}{2}\right) \quad \text{definita per } s \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$$

Si vede che f è concava sull'intervallo di definizione ed E si può tracciare facilmente come sottografico



Integrando prima rispetto ad y si ottiene:

$$\iint_E (x-2y)\,dx\,dy = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} x\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} dx \left[y^2\right]_0^{\sin\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left(\frac{x}{2}\right)} =$$

$$= \dots\dots = 6\sqrt{2}\,\pi - 2\pi$$

Esercizio 3

(a) Si ha

$$\gamma'(t) = \big(\gamma_1'(t)\,,\ \gamma_2'(t)\big) = \big(-2\sin t + 2\sin(2t)\,,\ 2\cos t - 2\cos(2t)\big)$$

da cui

$$\begin{aligned}\|\gamma'(t)\|^2 \;&=\; 4\sin^2 t + 4\sin^2(2t) - 8\sin t\sin(2t) + 4\cos^2 t + 4\cos^2(2t) + \\ -8\cos t\cos(2t) \;&=\; 8\big(1 - \sin t\sin(2t) - \cos t\cos(2t)\big) \;=\; 8(1-\cos t)\,.\end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned}\ell(\gamma) \;&=\; \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\|\,dt \;=\; 2\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos t}\,dt \;= \\ &=\; 4\int_0^{2\pi} \sin\big(t/2\big)\,dt \;=8\int_0^{\pi} \sin y\,dy \;=\; 16\,.\end{aligned}$$

(b) Si ha

$$\begin{aligned}\int_\gamma y\,dx - x\,dy \;&=\; \int_0^{2\pi} \big(\gamma_2(t)\gamma_1'(t) - \gamma_1(t)\gamma_2'(t)\big)\,dt \;=\; \int_0^{2\pi} \Big(\big(2\sin t - \sin(2t)\big)\,\cdot \\ &\cdot\big(2\sin(2t) - 2\sin t\big) - \big(2\cos t - \cos(2t)\big)\big(2\cos t - 2\cos(2t)\big)\Big)\,dt \;= \\ &=\; -\int_0^{2\pi} \big(4\sin^2 t \; + 2\sin^2(2t) - 6\sin t\sin(2t) + 4\cos^2 t + 2\cos^2(2t)\big) + \\ &+ 6\cos t\cos(2t)\big)\,dt \;=\; 6\int_0^{2\pi} \big(\sin t\sin(2t) + \cos t\cos(2t) - 1\big)\,dt \;= \\ &=\; 6\int_0^{2\pi} \big(\cos t - 1\big)\,dt \;=\; -12\pi\,.\end{aligned}$$