Esercizio 1

– fare uno studio qualitativo del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2 - \sin^2 x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Si osserva subito che $f(x,y) = y^2 - \sin^2 x$ verifica le ipotesi del teorema di esistenza ed unicità locale (è $C^\infty(\mathbb{R}^2)$) per cui si può subito affermare che la soluzione massimale per $y(0)=0$ esiste unica e che ogni altra soluzione massimale non si interseca con le altre.

Si nota poi che $v(x) \equiv 0$ è una soprasoluzione per $y' = y^2 - \sin^2 x$

infatti $\quad v'(x) \equiv 0 \geq f(x, v(x)) = 0^2 - \sin^2 x$

mentre $\quad z_1(x) \equiv 1 \quad$ e $\quad z_{-1}(x) \equiv -1 \quad$ sono, rispettivamente, sottosoluzioni

infatti

$$z_1'(x) \equiv 0 \equiv z_{-1}'(x) \quad \text{e}$$

$$0 \leq f(x, z_1(x)) = f(x, z_{-1}(x)) = 1 - \sin^2 x$$

Inoltre se $y_\alpha(x)$ è soluzione di $y' = y^2 - \sin^2 x$, $y(0) = \alpha$ su I_α

allora $\tilde{y}(x) = -y_\alpha(x)$ è soluzione di $y' = y^2 - \sin^2 x$ su $-I_\alpha$

con dato iniziale $\tilde{y}(0) = -\alpha$

infatti $\quad \tilde{y}'(x) = -1 y_\alpha'(-x)\cdot(-1) = y_\alpha'(-x) = y_\alpha^2(-x) - \sin^2(-x) =$

$$= \tilde{y}^2(x) - \sin^2 x$$

Si può quindi studiare la soluzione con dato iniziale $y(0)=0$ solo per $x \geq 0$ perché $-y(-x)$ costituisce un prolungamento della soluzione agli $x \leq 0$ e per l'unicità della soluzione massimale, coincide con la soluzione stessa. Sia $y_0(x)$ questa soluzione.

Poiché $v(x) \equiv 0$ ~~sopra~~soluzione e $v(0)=0$ si ha

$$y_0(x) \leq 0 \quad \forall\, x \geq 0, \; x \in \mathrm{Dom}\, y_0$$

(in realtà vale $y_0(x) < 0 \quad \forall x > 0$)

mentre $z_{-1}(x) \equiv -1$ sottosoluzione e $z_1(0) = -1 < 0 = y_0(0)$

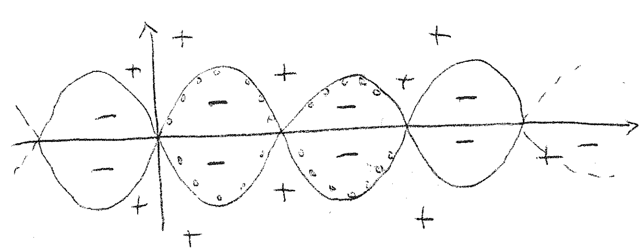
$$\Longrightarrow \quad -1 \leq y_0(x) \quad \forall\, x > 0, \; x \in \mathrm{Dom}\, y_0$$

$\Longrightarrow$ $y_0(x)$ resta limitata nel suo dominio intersecato $x \geq 0$

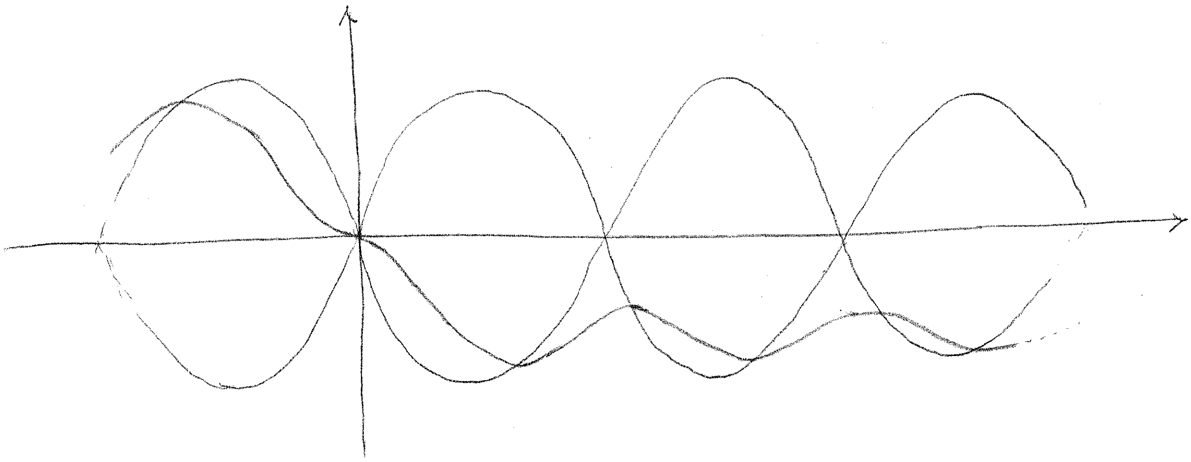
$\Longrightarrow$ $y_0(x)$ è definita $\forall\, x \geq 0$ e, per quanto visto sopra,

$$\mathrm{Dom}\, y_0 = \mathbb{R}$$

Tenendo conto del segno di y'



e del fatto che i rami crescenti di $\sin x$ e $-\sin x$ sono soprasoluzioni (ed i rami decrescenti sono sottosoluzioni) il grafico della soluzione y_0 è il seguente



- Dimostrare che $\exists\, \bar{\alpha} > 0$ tale che $y_{\bar{\alpha}}$ non è definita su tutto $\mathbb{R}$.

se prendiamo $\bar{\alpha} = 1$ allora $y_{\bar{\alpha}}(x) \geq 1$ per $x \geq 0$ perché $z_1(x) \equiv 1$ è una sottosoluzione. Se ne deduce che per $x \geq 0 \cap \mathrm{Dom}\, y_{\bar{\alpha}}$

$$y'_{\bar{\alpha}}(x) = y^2_{\bar{\alpha}}(x) - \sin^2 x \geq \bar{y}^2_{\alpha}(x) - 1$$

e, poiché $y'_{\bar{\alpha}}(0) = 1$, $y_{\bar{\alpha}}(\bar{x}) > 1$ per qualche $\bar{x} > 0$ fissato

ossia $y_{\bar{\alpha}}$ è una soprasoluzione per il problema $v' = v^2 - 1$

Per confronto con la soluzione di $\begin{cases} v' = v^2 - 1 \\ v(\bar{x}) = y_{\bar{\alpha}}(\bar{x}) \; (>1) \end{cases}$ $\left(\begin{matrix} \varphi(x) \to +\infty \\ \text{per } x \to b^- \\ {}^{\in}\mathbb{R} \end{matrix} \right)$

si ha che $y_{\bar{\alpha}}(x) \geq v(x)$ per $x \geq \bar{x}$ da cui $\mathrm{Dom}\, y_{\bar{\alpha}} \subset (-\infty, b)$

- (versione modificata, più facile)

dim. che $\exists\, c>0$ tale che $\forall \alpha \in (-c,0)$ la soluzione y_α è definita su tutto $\mathbb{R}^+$ ed inoltre $|y'| \leq 1$.

Poiché 0 e -1 sono, rispettivamente, sopra e sottosoluzione di $y' = y^2 - \sin^2 x$

allora $\forall \alpha \in (-1,0)$ si ha che $-1 \leq y_\alpha(x) \leq 0 \quad \forall x \geq 0 \cap \mathrm{Dom}\, y_\alpha$

da cui se ne deduce che y_α esiste $\forall x \geq 0$ ed $|y_\alpha| \leq 1$.

Si ottiene subito che preso $c=1$ allora $\forall \alpha \in (-1,0)$

y_α è definita su tutto $\mathbb{R}^+$ e $|y'_\alpha| \leq \max\{|y_\alpha|, \sin^2 x\} \leq 1$.

- posto $C = \sup$ dei valori sopra studiare y_C (soluzione con $y(0)=c$)

Si ha che $C \geq 1$ perché 1 verifica il punto sopra. Per ogni altro c che lo verifica si deve anche avere che $|y'_\alpha| \leq 1 \quad \forall \alpha \in (-c,0)$.

Preso $|y'_\alpha(0)| = |y^2_\alpha(0)| = \alpha^2$ si deve quindi avere $|\alpha| \leq 1$

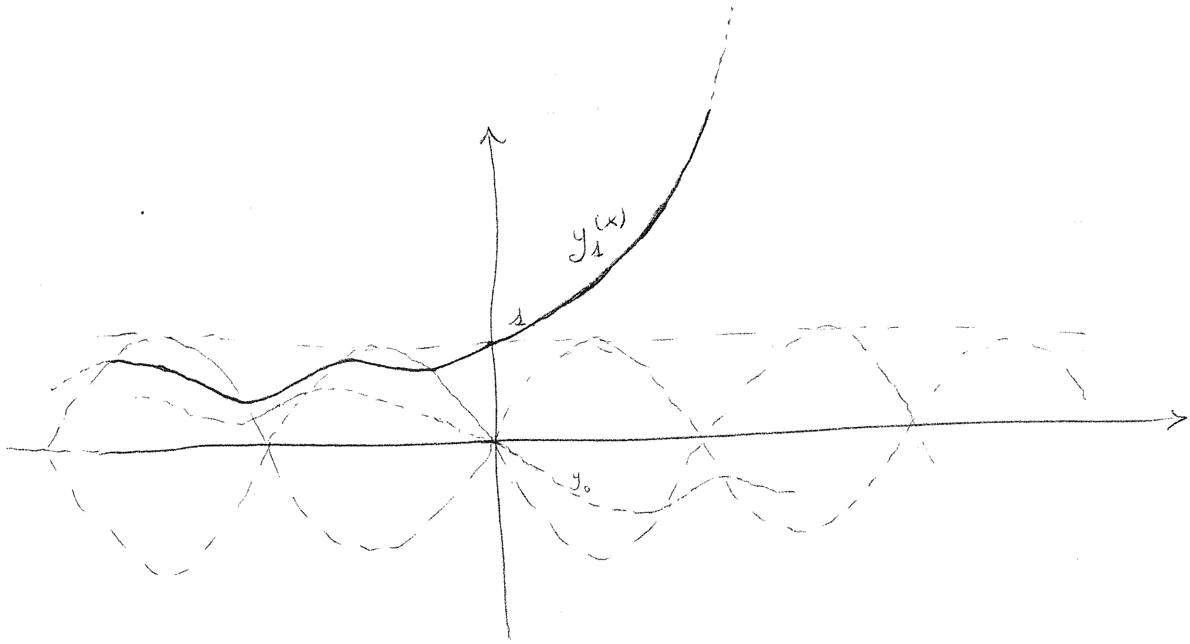
ossia $c \leq 1$. Il sup è quindi $C = 1$.

La soluzione relativa a $C=1$ è stata già studiata al secondo punto per gli $x \geq 0$.

In particolare $y_1(x)$ è crescente per $x \geq 0$ e tende a $+\infty$ per $x \to \sup \mathrm{Dom}\, y_1 < +\infty$

Per gli $x \leq 0$ si ha che $y_1(x) \geq y_0(x)$ dove $y_0(x)$ è la soluzione studiata al 1° punto. Poiché $y_0(x) \geq 0 \quad \forall x \leq 0$ e $y_1(x) \leq 1$ per $x \geq 0$ (1 è sottosoluzione) si ha che $y_1(x)$ è definita $\forall x \leq 0$.

Il suo grafico qualitativo è il seguente

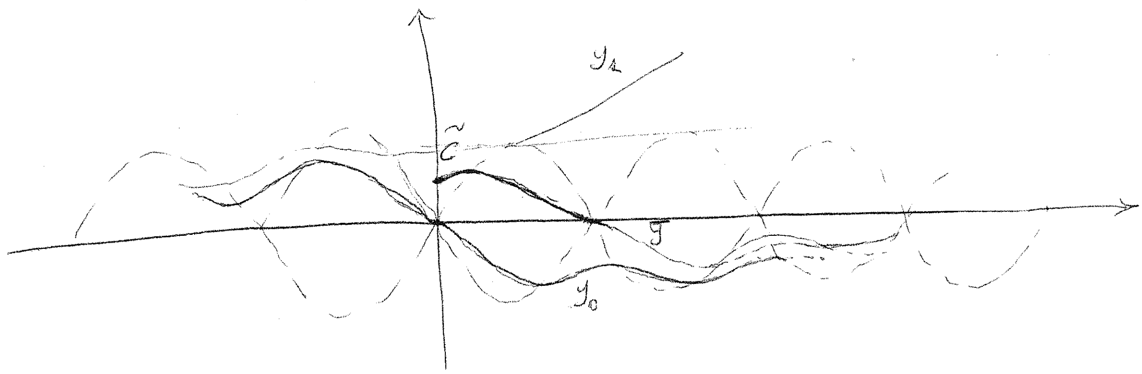


- (versione originale, + difficile)

dim. che $\exists\, \tilde{C} > 0$ tale che $\forall \alpha \in (-\tilde{C}, \tilde{C})$ y_α è definita su $\mathbb{R}$ e $|y'_\alpha| \leq 1$.

In questo caso un tale $\tilde{C}$ può essere preso uguale a $\bar{y}(0)$ dove $\bar{y}$ è la soluzione con dato iniziale $\bar{y}(\pi) = 0$. Analogamente a quanto fatto prima si potrebbe dimostrare che questa soluzione esiste $\forall x \in \mathbb{R}$, etc..

è più semplice però notare che se considero $y_0(x-\pi)$ questa è ancora soluzione (in generale se y è soluzione su $\mathbb{R}$ $y(\cdot+k\pi)$ è ancora soluzione) e passa per il pto 0 per $x=\pi$. A questo punto, per l'unicità, $\bar{y}(x)=y_0(x-\pi)$



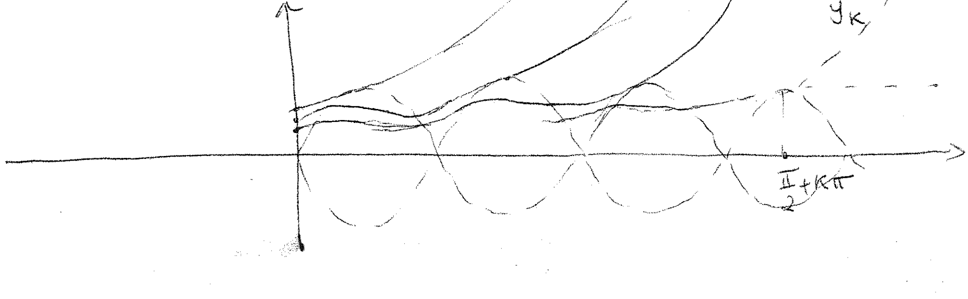
È chiaro che per ogni $\alpha\in(0,\tilde{c})$ la soluzione rimane limitata per $\forall x\in\mathbb{R}\cap \mathrm{Dom}\, y_\alpha$ da y_0 e da $\bar{y}$ $\Rightarrow$ y_α rimanendo limitata esiste $\forall x\in\mathbb{R}$

ed in particolare $|y'_\alpha|\leq \max\{|y_\alpha|, \sin^2 x\}\leq 1$

visto che y_α è limitata dalle ~~sol~~ soluzioni y_0 e $\bar{y}$ e per queste si è già visto che $|y_0|\leq 1$.

Per gli $\alpha\in(-\tilde{c},0)$ basta ricordarsi che $y_\alpha(x)=-y_{-\alpha}(-x)$.

Per trovare il sup dei $\tilde{c}$ come sopra invece conviene considerare le soluzioni $\tilde{y}_k$ di
$$\begin{cases} y'=y^2-\sin^2 x \\ y\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)=0 \end{cases} \qquad k\geq 0$$



Come fatto per $y_1(x)$ anche in questo caso si dimostra, per confronto con le soluzioni di $v' = v^2 - 1$, che $\tilde{y}_K$ "esplodono in tempo finito" ed esistono $\forall\ x \leq 0$. In particolare risulta in questo caso che

$$\bar{y}_{K-1}(x) = \bar{y}_K(x + \pi) \quad \forall\, x \in \mathrm{Dom}\, \bar{y}_{K-1}.$$

Posto $\tilde{c} = \inf_{K \geq 0} \tilde{y}_K(0)$ si ha che la soluzione relativa a $\tilde{c}$ $y_{\tilde{c}}$ esiste $\forall\ x \leq 0$ per confronto con $\tilde{y}_1$ e $v(x) \equiv 0$ che la limitano dall'alto e dal basso, rispettivamente. $y_{\tilde{c}}$ inoltre esiste anche $\forall\, x \geq 0$ in quanto $\tilde{y}_c$ è limitata dal basso da $z_{-1}(x) \equiv -1$ e dall'alto da $\bar{y}_K$ sull'intervallo $(-\infty, \sup \mathrm{dom}\, \bar{y}_K)$; visto che $\mathrm{dom}\, \bar{y}_K = \mathrm{dom}\, \bar{y}_0 + K\pi$ si ha $\tilde{\tilde{y}}_{\tilde{c}}$ è limitata dall'alto su tutto $\mathbb{R}$ $\Longrightarrow$ è definita su $\mathbb{R}$.

Si può inoltre dimostrare che $\tilde{\tilde{y}}_{\tilde{c}}$ è π-periodica.

Per costruzione $\tilde{c} = \inf_{K \geq 0} \tilde{y}_K(0)$ è anche il sup dei valori per cui vale il pto sopra. Infatti preso $\bar{c} > \tilde{c}$ se consideriamo $\alpha = \frac{\bar{c} - \tilde{c}}{2} + \tilde{c}$ allora y_α non può esistere $\forall\ x \geq 0$ in quanto si trova $\bar{K} \in \mathbb{N}$ tale che $\bar{y}_{\bar{K}}(0) \leq \alpha$ (proprietà dell'estremo inferiore). Poiché $\bar{y}_{\bar{K}}$ va a $+\infty$ in tempo finito e $y_\alpha(x) \geq \bar{y}_K(x)$, si conclude che $\mathrm{Dom}\, y_\alpha \neq \mathbb{R}$.