Esercizi per il Corso di Istituzioni di Matematica

Numeri complessi: forma algebrica e trigonometrica, operazioni, calcolo di radici.

1) Mettere in forma algebrica $a + ib$, con $a, b \in \mathbb{R}$, i seguenti numeri complessi:

$$a)\ \frac{3+6i}{3-4i} - \frac{1}{(1-i)^2}; \qquad b)\ \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i};$$

$$c)\ ((1+i)(2-i)(3+5i))^{-2}; \quad d)\ \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}.$$

Soluzioni:

$$a)\ -\frac{3}{5} + \frac{7i}{10}; \quad b)\ \frac{-23+36i}{25};$$

$$c)\ \frac{2-9i}{170}; \qquad d)\ -3.$$

2) Determinare il coniugato ed il modulo dei seguenti numeri complessi:

$$a)\ (3+6i)^{-1}(3-4i); \quad b)\ i^3 - 2(-i)^5 + (-2)^4;$$

$$c)\ i\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2; \qquad d)\ \frac{2+5i}{1-i} - (1+i^{10}).$$

Soluzioni:

$$a)\ \overline{z} = -\frac{1}{3} + \frac{2i}{3}, |z| = \frac{\sqrt{5}}{3}; \quad b)\ \overline{z} = 16 - i, |z| = \sqrt{257};$$

$$c)\ \overline{z} = \frac{-6+8i}{25}, |z| = \frac{2}{5}; \qquad d)\ |z| = 2\sqrt{17},).$$

3) Scrivere in forma algebrica i numeri complessi con:
a) modulo 2 e argomento $\pi/3$; b) modulo 4 e argomento $-3\pi/4$;
c) modulo 3 e argomento $5\pi/6$; d) modulo 5 e argomento $12\pi/4$.

Soluzioni: a) $1 + i\sqrt{3}$; b) $-2\sqrt{2} - i2\sqrt{2}$;
c) $\dfrac{-3\sqrt{3}+3i}{2}$; d) -5.

4) Calcolare il modulo e l'argomento dei seguenti numeri complessi u, v dati da:

$$u = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2} \qquad v = 1 - i$$

e dedurre il modulo e l'argomento di $w = \dfrac{u}{v}$.

Soluzioni: $|u| = \sqrt{2}, \arg(u) = -\dfrac{\pi}{6}$; $|v| = \sqrt{2}, \arg v = -\dfrac{\pi}{4}$; $|w| = 1, \arg(w) = \dfrac{\pi}{12}$.

5) Calcolare le radici quadrate di $3 + 4i, 8 - 6i, 7 + 6i$.

Soluzioni: *Ricordarsi che le radici quadrate di un numero complesso w sono tutti i numeri complessi z che verificano $z^2 = w$. In particolare basta calcolarne una perché l'altra soluzione è l'opposta.*

a) $z^2 = 3 + 4i$ da cui, ponendo $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$ si ha

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3; \\ 2xy = 4 \end{cases}$$

e quindi ricavando dalla seconda equazione che $y = \frac{2}{x}$ e sostituendo nella prima otteniamo

$$x^2 - \frac{4}{x^2} = 3$$

ovvero

$$x^4 - 3x^2 - 4 = 0$$

da cui ponendo $x^2 = t \geq 0$ si ricava $t = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2}$, ovvero, prendendo solo la soluzione positiva, $t = \frac{9}{2}$ e dunque $x = \pm 2$ e dunque le soluzioni sono $z = 2 + i$, $z = -2 - i$.

b) $z^2 = 8 - 6i$. Analogamente a prima si ha il sistema

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 8; \\ 2xy = -6 \end{cases}$$

da cui $y = \frac{-3}{x}$ e quindi si deve risolvere $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$ da cui si ottiene che $x^2 = 4 + \sqrt{16 + 9} = 9$ e quindi $x = \pm 3$. Quindi si ha che $z = \pm(3 - i)$.

c) $z^2 = 7 + 6i$. Dal sistema

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 7; \\ 2xy = 6 \end{cases}$$

si ricava $y = \frac{3}{x}$ e quindi $x^4 - 7x^2 - 9 = 0$ e quindi $x^2 = \frac{7 + \sqrt{49 + 36}}{2} = \frac{7 + \sqrt{85}}{2}$ e $x = \sqrt{\frac{7 + \sqrt{85}}{2}}$ e quindi $z = \pm(\sqrt{\frac{\sqrt{85} + 7}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{85} - 7}{2}})$

6) Calcolare le radici cubiche dei numeri complessi al punto 3).

Soluzioni: *Si risolvono in forma trigonometrica determinando angolo e modulo.*

a) modulo $\sqrt[3]{2}$ e argomento $\pi/9, 7\pi/9, 13\pi/9$;
b) modulo $\sqrt[3]{4}$ e argomento $-\pi/4, 5\pi/12, 13\pi/12$;
c) modulo $\sqrt[3]{3}$ e argomento $5\pi/18, 17\pi/18, -7\pi/18$;
d) modulo $\sqrt[3]{5}$ e argomento $\pi/3, \pi, 5\pi/3$.

7) Calcolare le radici quadrate di $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ e dedurre i valori di $\cos(\pi/8)$ e $\sin(\pi/8)$.

Soluzioni: $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}} = e^{i\pi/4}$ e quindi se $z^2 = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ si ha che $z = \pm e^{i\pi/8}$. Dal sistema

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}; \\ 2xy = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

ricaviamo $y = \frac{\sqrt{2}}{4x}$ e quindi $x^4 - \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 - \frac{1}{8} = 0$. Si ricava $x = \pm\sqrt{\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}$. Quindi $z = \pm(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2})$ e dunque

$$\cos(\pi/8) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

e

$$\sin(\pi/8) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

8) Ispirandosi all'esercizio sopra calcolare i valori di $\cos(\pi/12)$ e $\sin(\pi/12)$.

Soluzioni: Dobbiamo calcolare le radici quadrate di $e^{i\pi/6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$. Poniamo dunque $z^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$. Abbiamo

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}; \\ 2xy = \frac{1}{2} \end{cases}$$

e quindi $y = \frac{1}{4x}$. Otteniamo dunque $x^4 - \frac{\sqrt{3}x^2}{2} - \frac{1}{16} = 0$ e quindi $x = \pm\sqrt{\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$. Quindi $z = \pm(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2})$ e dunque

$$\cos(\pi/12) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

e

$$\sin(\pi/12) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

9) Risolvere in $\mathbb{C}$ le seguenti equazioni:

$$a)\ z^2 + z + 1 = 0; \qquad b)\ z^2 - (1+2i)z + i - 1;$$

$$c)\ 4z^2 - 2z + 1 = 0; \quad d)\ z^2 - (3+4i)z - 1 + 5i = 0.$$

Soluzioni: *Usiamo la formula risolutiva indicando con $\sqrt{w}$ una delle due radici di w, dove w è il numero complesso coincidente con il delta dell'equazione di secondo grado.*

$a)\ z = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2};$

$b)\ z = \dfrac{1+2i \pm \sqrt{-3+4i-4i}}{2} = \dfrac{1+2i \pm i\sqrt{3}}{2};$

$c)\ z = \dfrac{4 \pm \sqrt{4-4}}{8} = \dfrac{1}{2}$

$d)\ z = \dfrac{3+4i \pm \sqrt{-7+24i+4-20i}}{2} = \dfrac{3+4i \pm \sqrt{-3+4i}}{2} = \dfrac{3+4i \pm (1+2i)}{2},$

$z_1 = 2+3i, z_2 = 1+i.$