Foglio 4 – Suggerimenti.

① $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^n} = +\infty \implies R=0$

$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^{-n}} = 0 \implies R=+\infty$

$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^{-n}} = \frac{1}{2} \implies R=2$

$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{(\log n)^2} = 1$ (poiché definitivamente $1\le(\log n)^2\le n$ e $\sqrt[n]{n}\to 1$),

$\implies R=1$

$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt[n]{n}\right)^2 = 1 \implies R=1$

$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \frac{1}{e}$ (ad esempio, sfruttando $\frac{a_{n+1}}{a_n}\to \ell \Rightarrow \sqrt[n]{a_n}\to\ell$,

con $a_n = \frac{n!}{n^n}$) $\implies R=e$

Sia $a_n = \frac{(n!)^3}{(3n)!}$. Allora $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{((n+1)!)^3}{(3n+3)!}\cdot\frac{(3n)!}{(n!)^3} =$

$= \frac{(n+1)^3}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)} \xrightarrow{n\to+\infty} \frac{1}{27}$. Dunque

$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{(n!)^3}{(3n)!}} = \frac{1}{27}$ e $R=27$.

② Sia $c_n = \frac{a(a+1)\ldots(a+n)}{b(b+1)\ldots(b+n)}$. Chiaramente,

se $a=-n_0$ è un intero negativo, allora $c_n=0$

$\forall n\ge n_0$, e la serie è un polinomio (per cui $R=+\infty$).

Altrimenti, sia $d_n = \frac{|a+n|}{|b+n|}$. Allora

$\lim_{n\to+\infty} d_n = 1$. Inoltre, poiché $d_n > 0$ $\forall n$,

il limite di d_n è uguale a quello delle medie geometriche dei d_n (facile esercizio di Analisi 1), per cui $1 = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{d_1 \cdots d_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$, da cui

$R = 1$. Dunque $R = 1$ a meno che $a = -n_0$ per qualche $n_0 \in \mathbb{N}$, nel qual caso $R = +\infty$.

3) Se $|z| \leq c < 1$,

$$\left|\frac{n z^n}{1-z^n}\right| \leq n c^n \quad \text{e} \quad \left|\frac{z^n}{(1-z^n)^2}\right| \leq c^n,$$

per cui, poiché $\sum_{n\geq 0} n c^n < +\infty$, $\sum_{n\geq 0} c^n < +\infty$,

le serie date convergono TOTALMENTE, dunque uniformemente, su $|z| \leq c$.

4) Poiché limite uniforme di funzioni continue, f è continua. Se $R \subseteq D$ è un rettangolo interamente contenuto in D,

$$\int_{\partial R} f(z)\,dz = \lim \int_{\partial R} f_n(z)\,dz = 0 \qquad (\partial R \text{ è compatto})$$

visto a lezione

5) Sia $z = c + id$. Allora $a_n = e^{-an^2 z} = e^{-acn^2} e^{-n^2 d i}$.

Dunque $|a_n| = e^{-acn^2}$, e

$c \leq 0 \implies |a_n| \geq 1 \implies$ la serie non converge in $z = c + id$

$c > 0 \implies$ definitivamente, $e^{-acn^2} \leq e^{-n} \implies$

la serie converge in $z = c+id$.

Dunque $D \subseteq \{z : Re(z) > 0\}$. Per dimostrare che vale l'uguaglianza, per l'Ex. 4, basta vedere che la serie data converge totalmente sui compatti di D.

Se $K \subseteq D$ è compatto, $\exists \varepsilon > 0$ t.c.

$K \subseteq \{z \in \mathbb{C},\ Re(z) > \varepsilon\}$ (perché?), dunque

$\forall z \in K \quad |e^{-2n^2 z}| \leq |e^{-2\varepsilon n^2}|$. Ora, $\exists n_0$ t.c.

$2\varepsilon n^2 \geq n \quad \forall n \geq n_0$, per cui

$|e^{-2n^2 z}| \leq e^{-n} \quad \forall z \in K, \quad \forall n \geq n_0$. La tesi segue (riempite i dettagli!).

6. Sia $r = \{z \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C},\ z \leq 0\}$ e sia $D = \mathbb{C} \setminus r$.

Dico che D risolve l'esercizio. Infatti, la funzione $z \mapsto 4 \log z$ è olomorfa ed estende f su D.

Supponiamo ora $D' \supseteq D$ aperto, sia $x_0 \in D' \setminus D$ e supponiamo che f si estenda su D'. Notiamo che f non si estende con continuità in 0, per cui $0 \notin D'$ e $x_0 < 0$. Per continuazione analitica, $f(z) = 4 \log z \quad \forall z \in D$.

Sia $g : D' \to \mathbb{C}$, $g(z) = \frac{1}{z}$. Poiché sia g sia f' sono olomorfe su D' e coincidono su un aperto, $f' = g$ su D'. Ma allora $g(z)dz$ è esatta su D', contro il fatto che $\int_\gamma \frac{1}{z} dz \neq 0$ se $\gamma : [0, 2\pi] \to D'$

$\gamma(t) = |x_0| e^{2\pi i t}$.

Se f si estendesse con continuità a $\overline{D} = \mathbb{C}$, per un Teorema visto a lezione f si estenderebbe a una funzione olomorfa su $\mathbb{C}$, e abbiamo già visto che ciò è falso.

In alternativa, per mostrare direttamente che f non si può estendere con continuità in nessun punto di ∂D (e dunque in particolare D è massimale) bastava verificare che $\forall x_0 \leq 0$

$$\lim_{y \to 0^+} 4 \log(x_0 + iy) \neq \lim_{y \to 0^-} 4 \log(x_0 + iy).$$

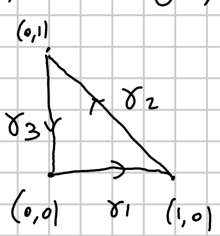
⑦ La funzione $f(z) = \sin z$ ammette la primitiva $F(z) = \cos z$, per cui $\int_\gamma \sin z \, dz = \cos(\gamma(1)) - \cos(\gamma(0)) =$

$$= \cos(1+i) - \cos(0) = \cos(1+i) - 1.$$

⑧ Sulla circonferenza di raggio unitario, $\frac{z}{\overline{z}} = z^2$, per cui $\int_\gamma \frac{z}{\overline{z}} \, dz = \int_\gamma z^2 \, dz = 0$ in quanto $z^2 \, dz$ è esatta (perché?).

⑨ Posto $z = x + iy$, si ha $(z - \overline{z})^2 = (2iy)^2 = -4y^2$.

Ora $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2 * \gamma_3$, dove $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sono i cammini in figura



$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma_1(t) = t$, $\gamma_2(t) = 1 - t + it$, $\gamma_3(t) = (1-t)i$

Poiché $dz = Id$, si ha perciò

$dz(\gamma_1'(t)) = 1$, $dz(\gamma_2'(t)) = -1+i$, $dz(\gamma_3'(t)) = -i$, e

$$\int_\gamma (z - \bar{z})\, dz = -4\left[\int_0^1 0 \cdot 1\, dt + \int_0^1 t^2(-1+i)\, dt + \int_0^1 (1-t)^2(-i)\, dt\right] =$$

$$= -4\left[0 + (-1+i)\cdot \frac{1}{3} + (-i)\frac{1}{3}\right] = \frac{4}{3}$$

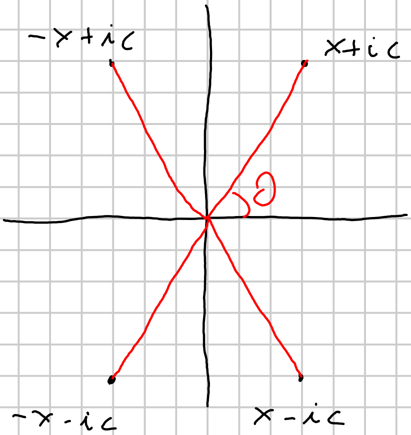
10 Sia log una branca del logaritmo definita su $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C},\ Im(z) \le 0\}$ e siano

$F(z) = \log(z - z_0 - x)$, $G(z) = \log(z - z_0 + x)$

La particolare scelta della branca di log assicura che F e G siano definite lungo γ, per cui

$$\int_\gamma \frac{dz}{z - z_0 - x} \quad F(\gamma(1)) - F(\gamma(-1)) = \log(ic - x) - \log(-ic - x)$$

$$\int_\gamma \frac{dz}{z - z_0 + x} = G(\gamma(1)) - G(\gamma(-1)) = \log(ic + x) - \log(-ic + x)$$



Se $\theta = \arctan \frac{c}{x} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

e $\ln : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ è l'usuale logaritmo reale, allora

$\log(x + ic) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + c^2) + i\theta$, $\log(x - ic) = \frac{1}{2}\ln(x^2+c^2) - i\theta$

$\log(-x + ic) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + c^2) + i(\pi - \theta)$, $\log(-x - ic) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + c^2) + i(\pi + \theta)$,

per cui $\displaystyle\int_\gamma \left(\frac{1}{z - z_0 - x} - \frac{1}{z - z_0 + x}\right) dz =$

$$= \frac{1}{2}\cancel{\ln(x^2+c^2)} + i(\pi - \vartheta) - \left(\frac{1}{2}\cancel{\ln(x^2+c^2)} + i(\pi+\vartheta)\right) +$$

$$-\left(\frac{1}{2}\cancel{\ln(x^2+c^2)} + i\vartheta\right) - \left(\frac{1}{2}\cancel{\ln(x^2+c^2)} - i\vartheta\right)\Big) =$$

$$= i(\pi - \vartheta - \pi - \vartheta - \vartheta - \vartheta) = -4i\vartheta$$

Per $x \to 0$, si ha $\vartheta \to \frac{\pi}{2}$, per cui il limite richiesto è $-2\pi i$

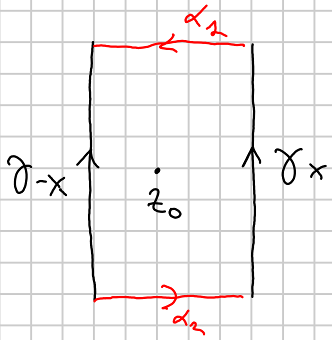
Soluzione alternativa (sketch): Per $x \in \mathbb{R}$, $x>0$,

siano $\gamma_x, \gamma_{-x} : [-1,1] \to \mathbb{C}$,

$\gamma_x(t) = z_0 + x + itc$, $\quad \gamma_{-x}(t) = z_0 - x + itc$

Allora $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0-x} = \int_{\gamma_{-x}} \frac{dz}{z-z_0}$ e $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0+x} = \int_{\gamma_x} \frac{dz}{z-z_0}$

(si effettuino due facili cambi di variabile!)



Sia $\beta = \gamma_x * \alpha_1 * \overline{\gamma_{-x}} * \alpha_2$. Allora

$$\int_\beta \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i \, I(\beta, z_0) = 2\pi i .$$

Dunque $\displaystyle\int_\gamma \left(\frac{1}{z-z_0-x} - \frac{1}{z-z_0+x}\right) dz = \int_{\gamma_{-x}} \frac{dz}{z-z_0} - \int_{\gamma_x} \frac{dz}{z-z_0} =$

$$= -\left(\int_{\gamma_x} \frac{dz}{z-z_0} - \int_{\gamma_{-x}} \frac{dz}{z-z_0}\right) = -\left(\left(\int_\beta \frac{dz}{z-z_0} - \int_{\alpha_1} \frac{dz}{z-z_0} - \int_{\alpha_2} \frac{dz}{z-z_0}\right) =\right.$$

$$= -\left(2\pi i - \int_{\alpha_1}\frac{dz}{z-z_0} - \int_{\alpha_2}\frac{dz}{z-z_0}\right).$$

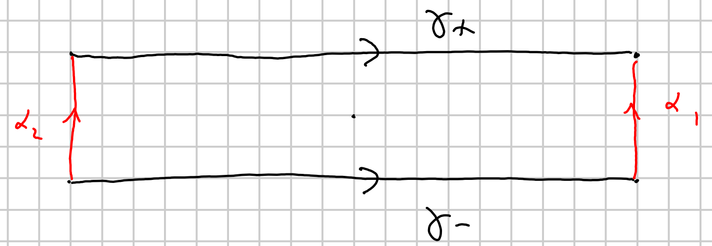
Ora è facile vedere che, per $x \to 0$, gli integrali lungo α_1 e α_2 tendono a 0, da cui la tesi.

(11) Siano $\gamma_+, \gamma_- : [-B,B] \to \mathbb{C}$ date da

$\gamma_+(t) = t + ix$, $\gamma_-(t) = t - ix$, e siano

$\alpha_1, \alpha_2 : [-x, x] \to \mathbb{C}$,

$\alpha_1(t) = B + it$, $\alpha_2(t) = -B + it$



Sia anche $\beta = \gamma_- * \alpha_1 * \overline{\gamma_+} * \overline{\alpha_2}$. Con facili cambi di variabile si ha

$$\int_{-B}^{B}\left(\frac{1}{t+ix} - \frac{1}{t-ix}\right)dt = \int_{-B}^{B}\frac{dt}{t+ix} - \int_{-B}^{B}\frac{dt}{t-ix} =$$

$$= \int_{\gamma_+}\frac{dz}{z} - \int_{\gamma_-}\frac{dz}{z} = -\left(\int_{\overline{\gamma_+}}\frac{dz}{z} + \int_{\gamma_-}\frac{dz}{z}\right) =$$

$$= -\left(\int_{\beta}\frac{dz}{z} - \int_{\alpha_1}\frac{dz}{z} + \int_{\alpha_2}\frac{dz}{z}\right) = -2\pi i\, I(\beta, 0) + \int_{\alpha_1}\frac{dz}{z} - \int_{\alpha_2}\frac{dz}{z}$$

Ora $\left|\int_{\alpha_1}\frac{dz}{z}\right| = \left|\int_{-x}^{x}\frac{i}{B+it}\,dt\right| \le \int_{-x}^{x}\frac{1}{|B+it|}\,dt \le$

$\le \int_{-x}^{x}\frac{1}{B}\,dt = \frac{2x}{B}$, che tende a 0 per $x \to 0$.

Un analoga stima vale per $\int_{\gamma_2} \frac{dz}{z}$, per cui il limite richiesto vale $-2\pi i$.

Soluzione alternativa $\quad \frac{1}{t+ix} - \frac{1}{t-ix} =$

$$= \frac{t-ix-t-ix}{t^2+x^2} = -2i \frac{x}{t^2+x^2}$$, per cui

$$\int_{-B}^{B} \left(\frac{1}{t+ix} - \frac{1}{t-ix} \right) dt = -2i \int_{-B}^{B} \frac{x}{t^2+x^2} \, dt =$$

$$= -2i \arctan \frac{t}{x} \Big|_{-B}^{B} = -4i \arctan \frac{B}{x}$$, da cui la tesi.

12 Per la formula di Cauchy,

$$\int_{S^1} \frac{\cos z}{z} \, dz = 2\pi i \cos(0) = 2\pi i$$

$$\int_{S^1} \frac{\sin z}{z} \, dz = 2\pi i \sin(0) = 0$$

$$\int_{S^1} \frac{\cos(z^2)}{z} \, dz = 2\pi i \cos(0) = 2\pi i.$$

13 Per il primo integrale, la formula di Cauchy dà

$$\int_{\partial D} \frac{e^{-z}}{z - i\frac{\pi}{2}} = 2\pi i \cdot I\left(\partial D, i\frac{\pi}{2}\right) \cdot e^{\frac{i\pi}{2}} = 2\pi i \cdot i = -2\pi.$$

Per il secondo integrale, notiamo che z^2+8 non si annulla in D, per cui $f(z) = \frac{\cos z}{z^2+8}$ è olomorfa in (un aperto che contiene) D. Dunque

$$\int_{\partial D} \frac{f(z)}{z}\, dz = 2\pi i \cdot I(\partial D, 0) \cdot f(0) = 2\pi i \,\frac{\cos 0}{0+8} = \frac{\pi i}{4}$$

Per il terzo integrale, posto $f(z) = z$,

$$\int_{\partial D} \frac{z}{2z+1}\, dz = \frac{1}{2}\int \frac{z}{\left(z+\frac{1}{2}\right)}\, dz = 2\pi i \cdot I\left(\partial D, -\frac{1}{2}\right) \cdot f\left(-\frac{1}{2}\right) =$$

$$= 2\pi i \left(-\frac{1}{2}\right) = -\pi i.$$

14 Nel caso a), la funzione $\frac{z^2+1}{z(z-8)}$ è olomorfa nel disco bordato dalla circonferenza, per cui l'integrale è nullo. Nel caso b), posto $f(z) = \frac{z^2+1}{z-8}$, la funzione f è olomorfa nel disco bordato dalla circonferenza, per cui

$$\int_{\gamma} \frac{z^2+1}{z(z-8)}\, dz = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z}\, dz = I(\gamma, 0) f(0) =$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{-8} = -\frac{1}{8}.$$

15 Se $n=0$, $A + Bz + Cz^2$ è olomorfa in $\mathbb{C}$ e l'integrale è nullo.

Se $n=1$, $\displaystyle\int_{\gamma} \frac{A+Bz+Cz^2}{z}\, dz = A\int_{\gamma} \frac{dz}{z} + \int_{\gamma} (B + Cz)\, dz =$

$= 2\pi i A + 0 = 2\pi i A$

Ricordiamo ora che, se $n \geq 2$, la forma $\frac{dz}{z^n}$ è esatta in $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (in quanto ammette la primitiva $-\frac{1}{(n-1)z^{n-1}}$). Dunque:

Se $n=2$, $\int_\gamma \frac{A+Bz+Cz^2}{z^2}dz = A\int_\gamma \frac{dz}{z^2} + B\int_\gamma \frac{dz}{z} + \int_\gamma C dz =$

$= A\cdot 0 + 2\pi i B + 0 = 2\pi i B.$

Analogamente, se $n=3$ otteniamo $2\pi i C$, e se $n\geq 4$ otteniamo 0.

16 $u = \mathrm{Re}(f)$, f olomorfa $\Longleftrightarrow$ $\Delta u = 0$

($\mathbb{C}$ è semplicemente connesso).

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4\sin x\cos x\, e^{2y} = 2\sin 2x\, e^{2y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2e^{2y}(2\sin^2 x - 1) = 2e^{2y}(\cancel{1} - \cos 2x - \cancel{1}) = -2e^{2y}\cos 2x$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4\cos 2x\, e^{2y} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -4e^{2y}\cos 2x$$

Dunque $\Delta u = 0$, e $u = \mathrm{Re}(f)$, f olomorfa. Per trovare la possibile parte immaginaria v di f, risolviamo

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x},$$ ovvero

cerchiamo una primitiva di

$$-\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy = 2e^{2y}\cos 2x\, dx + 2e^{2y}\sin 2x\, dy$$

Basta porre $v = e^{2y}\sin 2x + Ki$, K costante

Dunque $f(x,y) = e^{2y}(2\sin^2 x - 1 + i\sin 2x) + K$

$= e^{2y}(-\cos 2x + i\sin 2x) + K =$

$$= e^{2y} \cdot i \left(\sin 2x + i \cos 2x \right) + k = e^{2ix+2y} + k, \text{ dunque}$$

$$f(z) = e^{2z} + k.$$

17) $$\frac{\partial u}{\partial x} = -\sin x \left(e^{ay} + e^{-y} \right) \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \cos x \left(a e^{ay} - e^{-y} \right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\cos x \left(e^{ay} + e^{-y} \right) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \cos x \left(a^2 e^{ay} + e^{-y} \right)$$

$$\Delta u \equiv 0 \iff \cos x \left(-e^{ay} - e^{-y} + a^2 e^{ay} + e^{-y} \right) \equiv 0$$

$$\iff a^2 = 1 \iff a = \pm 1.$$

Se $a = 1$, cerco v con $\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\cos x \left(e^{y} - e^{-y} \right) \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = -\sin x \left(e^{y} + e^{-y} \right) \end{cases}$

$$\Rightarrow v = -\sin x \left(e^{y} - e^{-y} \right) \Rightarrow$$

$$f(x,y) = \cos x \left(e^{y} + e^{-y} \right) - i \sin x \left(e^{y} - e^{-y} \right) =$$

$$= 2 \cos x \cosh y - 2i \sin x \sinh y =$$

$$= 2 \cos x \cos iy - 2 \sin x \sin iy =$$

$$= 2 \cos (x + iy),$$

$$f(z) = 2 \cos z$$

Il caso $a = -1$ è analogo.

18) a) è ovvio. Per b), basta osservare che

$H(t,s) = f\left((s R_0 + (1-s) R_1) e^{2\pi i t} \right)$ dà un'omotopia libera tra γ_{R_0} e γ_{R_1}. Poiché γ_0 è costante, $I(\gamma_0, 0) = 0$, il che risponde a c).

Se $R > \max\{1, |a_0| + |a_1| + \dots + |a_{d-1}|\} = R_0$, allora

$$|\gamma_R(t) - \alpha_R(t)| = \left|\sum_{i=0}^{d-1} a_i R^i e^{2\pi i \cdot i t}\right| \leq \sum_{i=0}^{d-1} |a_i R^i e^{2\pi i \cdot i t}| =$$

$$= \sum_{i=0}^{d-1} |a_i| R^i \leq \sum_{i=0}^{d-1} |a_i| \cdot R^{d-1} < R \cdot R^{d-1} = |\alpha_R(t)|.$$

Dunque, posto $\beta(t) = \gamma_R(t) - \alpha_R(t)$, $R > R_0$, abbiamo

$\gamma_R = \alpha_R + \beta$, $|\beta(t)| < |\alpha_R(t)|$ $\forall t$, e

$I(\gamma_R, 0) = I(\alpha_R, 0)$.

Ora, posto $\eta_R(t) = R e^{2\pi i t}$, abbiamo $\alpha_R(t) = \eta_R(t)^d$,

per cui $I(\alpha_R, 0) = d\, I(\eta_R, 0) = d$. Dunque per $R > R_0$

$I(\gamma_R, 0) = I(\alpha_R, 0) = d \neq 0 = I(\gamma_0, 0)$, assurdo.

(19) Sia $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = a\cos t + i b \sin t$.

Allora $I(\gamma, 0) = 1$, per cui $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi i$.

$$\text{Ora } \int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\, dt = \underbrace{\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\left(\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\right) dt}_{=0} + i \underbrace{\int_0^{2\pi} \mathrm{Im}\left(\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\right) dt}_{=2\pi}$$

$$\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} = \frac{-a\sin t + i b \cos t}{a\cos t + i b \sin t} = \frac{(-a \sin t + i b \cos t)(a\cos t - i b \sin t)}{a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t},$$

la cui parte immaginaria è $\dfrac{ab}{a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t}$.

$$\text{Dunque } \int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\, dt = \frac{1}{ab}\int_0^{2\pi} \frac{ab}{a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t}\, dt =$$

$$= \frac{2\pi}{ab}.$$