Corso di Geometria e Topologia Differenziale

Appello del 2/2/2017

La durata della prova è di 2 ore e 30 minuti.

Esercizio 1 (8 punti). Si costruiscano due superfici connesse S_1 ed S_2 che siano isometriche ma non congruenti, motivando adeguatamente la risposta (ovvero dimostrando che sono isometriche e che non sono conguenti).

Soluzione: L'esercizio è stato svolto a lezione.

Esercizio 2 (12 punti). Sia $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ la sfera di raggio unitario centrata nell'origine, e sia $\gamma\colon \mathbb{R} \to S^2$ una curva parametrizzata per lunghezza d'arco. Si supponga che γ sia periodica di periodo T_0, ovvero che $\gamma(s) = \gamma(s+T_0)$ per ogni $s \in \mathbb{R}$. Sia t, n, b il triedro di Frenet di γ.

(i) Si mostri che esiste una funzione liscia $\theta\colon \mathbb{R} \to (\pi/2, 3\pi/2)$ tale che

$$\gamma(s) = (\cos\theta(s))n(s) + (\sin\theta(s))b(s) \qquad \text{per ogni } s \in \mathbb{R} .$$

(ii) Si mostri che, detta τ la torsione di γ, si ha $\tau(s) = \theta'(s)$ per ogni $s \in \mathbb{R}$.

(iii) Si mostri che $\int_0^{T_0} \tau(s)\, ds = 0$.

Soluzione. Sia κ la curvatura di γ. Derivando l'uguaglianza $\langle \gamma(s), \gamma(s)\rangle = 1$ otteniamo $\langle \gamma(s), t(s)\rangle = 0$. Dunque $\gamma(s)$ è ortogonale a $t(s)$, e giace perciò sul piano generato da $n(s), b(s)$. Essendo $\|\gamma(s)\| = 1$, se ne deduce che esiste $\theta(s)$ tale che $\gamma(s) = (\cos\theta(s))n(s) + (\sin\theta(s))b(s)$. Si ha $\cos(\theta(s)) = \langle \gamma(s), n(s)\rangle$ e $\sin(\theta(s)) = \langle \gamma(s), b(s)\rangle$, per cui $\cos(\theta(s))$ e $\sin(\theta(s))$ dipendono in maniera C^∞ da s. Poiché la mappa $\alpha \mapsto (\cos\alpha, \sin\alpha)$ è un rivestimento da $\mathbb{R}$ su S^1, se ne deduce che la mappa $\theta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ può essere scelta liscia. Più precisamente, qualsiasi scelta di $\theta(0)$ tale che $\gamma(s) = (\cos\theta(0))n(0) + (\sin\theta(0))b(0)$ può essere estesa a una funzione liscia su tutto $\mathbb{R}$ tale che $\gamma(s) = (\cos\theta(s))n(s) + (\sin\theta(s))b(s)$ per ogni $s \in \mathbb{R}$.

Derivando l'uguaglianza $\langle \gamma(s), t(s)\rangle = 0$ si ottiene

$$0 = \langle t(s), t(s)\rangle + \kappa(s)\langle \gamma(s), n(s)\rangle = 1 + \kappa(s)\langle \gamma(s), n(s)\rangle ,$$

per cui $\cos(\theta(s)) < 0$ per ogni s. Scelto $\theta(0) \in (\pi/2, 3\pi/2)$, per continuità di θ si ha allora $\theta(s) \in (\pi/2, 3\pi/2)$ per ogni $s \in \mathbb{R}$.

(ii): Omettiamo d'ora in poi le dipendenze da s. Derivando l'uguaglianza $\gamma = (\cos\theta)n + (\sin\theta)b$ si ottiene

$$t = (-\theta'\sin\theta)n + (\cos\theta)(-\kappa t - \tau b) + (\theta'\cos\theta)b + (\sin\theta)\tau n ,$$

da cui, essendo t, n, b linearmente indipendenti, $\theta'\cos\theta = \tau\cos\theta$ e $\theta'\sin\theta = \tau\sin\theta$. Se ne deduce $\theta' = \tau$, come voluto. **Esercizio 1 (8 punti).** Si costruiscano due superfici connesse S_1 ed S_2 che siano isometriche ma non congruenti, motivando adeguatamente la risposta (ovvero dimostrando che sono isometriche e che non sono conguenti).

(iii): Poiché γ è T_0-periodica, anche t, n, b lo sono, per cui lo sono anche $\sin\theta$ e $\cos\theta$. Se ne deduce che, per ogni $s \in \mathbb{R}$, $\theta(s+T_0)$ e $\theta(s)$ differiscono per un multiplo di 2π. Poiché però

$\theta(s) \in (\pi/2, 3\pi/2)$ per ogni s, anche γ è T_0-periodica. Dunque

$$\int_0^{T_0} \tau(s)\, ds = \int_0^{T_0} \theta'(s)\, ds = \theta(T_0) - \theta(0) = 0 \ .$$

Esercizio 3 (10 punti).

(i) Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie orientata dal versore normale N, e sia $\gamma\colon I \to S$ una curva regolare, non necessariamente parametrizzata per lunghezza d'arco. Si mostri che, detta κ_g la curvatura geodetica di α, si ha

$$\kappa_g(t) = \frac{\langle \gamma''(t), N(\gamma(t)) \wedge \gamma'(t) \rangle}{\|\gamma'(t)\|^3} \ .$$

Si consideri ora l'insieme

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xe^z + ye^z + xy = 0\} \ ,$$

e sia $\gamma\colon (0, +\infty) \to S$ la curva $\gamma(t) = (-2e^t, -2e^t, t)$.

(ii) Si mostri che S è una superficie.

(iii) Si mostri che γ è regolare, e che la riparametrizzazione per lunghezza d'arco di γ è una geodetica di S.

Soluzione. (i): Sia $\alpha = \gamma \circ \psi$ una riparametrizzazione per lunghezza d'arco di γ. Allora

$$\alpha'(s) = \gamma'(\psi(s))\psi'(s) \ , \quad \alpha''(s) = \gamma''(\psi(s))\psi'(s)^2 + \gamma'(\psi(s))\psi''(s) \ .$$

Si ha $1 = \|\alpha'(s)\| = \|\gamma'(\psi(s))\psi'(s)\|$ per cui, essendo $\psi'(s) > 0$, $\psi'(s) = 1/\|\gamma'(\psi(s))\|$. Inoltre,

$$\kappa_g(\psi(s)) = \langle \alpha''(s), N(\alpha(s)) \wedge \alpha'(s) \rangle = \langle \gamma''(\psi(s))\psi'(s)^2 + \gamma'(\psi(s))\psi''(s), \psi'(s)(N(\gamma(s) \wedge \gamma'(\psi(s))) \ .$$

La tesi segue ora usando la bilinearità del prodotto scalare, il fatto che $\gamma' \perp (N \circ \gamma) \wedge \gamma'$ e l'uguaglianza $\psi'(s) = 1/\|\gamma'(\psi(s))\|$.

(ii): L'insieme S è il luogo di zeri della funzione $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ data da $g(x, y, z) = xe^z + ye^z + xy$, il cui differenziale è dato da $(e^z + y, e^z + x, (x + y)e^z)$, che non si annulla mai (in quanto dall'annullarsi della terza coordinata si dedurrebbe $x = -y$, che con l'annullarsi delle prime due coordinate implicherebbe $e^z = -e^z$). Dunque S è una superficie.

(iii): Si ha $\gamma'(t) = (-2e^t, -2e^t, 1) \neq 0$ per ogni t, per cui γ è regolare. La riparametrizzazione per lunghezza d'arco di γ è una geodetica se e solo se ha curvatura geodetica nulla. Possiamo allora sfruttare la formula dimostrata in (i), usando come versore normale il normalizzato del (duale del) differenziale di g. Sia perciò $\overline{N}(x, y, z) = (e^z + y, e^z + x, (x + y)e^z)$. Allora $\overline{N}(\gamma(t)) = (-e^t, -e^t, -4e^{2t})$, e $\kappa_g(t) = \langle \gamma''(t), \overline{N}(\gamma(t)) \wedge \gamma'(t) \rangle / (\|\overline{N}(\gamma(t))\| \cdot \|\gamma'(t)\|^3)$ è nullo se e solo se $\langle \gamma''(t), \overline{N}(\gamma(t)) \wedge \gamma'(t) \rangle = 0$. Ma

$$\langle \gamma''(t), \overline{N}(\gamma(t)) \wedge \gamma'(t) \rangle = \langle (-2e^t, -2e^t, 0), (-e^t, -e^t, -4e^{2t}) \wedge (-2e^t, -2e^t, 1) \rangle = 0 \ ,$$

da cui la tesi.