Corso di Geometria e Topologia Differenziale

Appello del 10/1/2019

La durata della prova è di 2 ore e 30 minuti.

Esercizio 1. (8 punti)
Sia $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata per lunghezza d'arco.

(i) Si mostri che il supporto di γ è contenuto in una retta se e solo se la curvatura di γ è identicamente nulla.

(ii) Sia γ biregolare. Si mostri che il supporto di γ è contenuto in un piano se e solo se la torsione di γ è identicamente nulla.

Soluzione.
Svolto a lezione.

Esercizio 2. (10 punti)
Siano $0 < r < R$ due numeri positivi, e si consideri la funzione

$$x\colon (-\pi/2, \pi/2) \times (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}^3 \ ,$$

$$x(u, v) = \big((R + r\cos u)\cos v, (R + r\cos u)\sin v, r\sin u\big) \ .$$

(i) Si dimostri che x è una parametrizzazione globale della superficie $S = x((-\pi/2, \pi/2) \times (-\pi/2, \pi/2))$.

(ii) Si calcoli la curvatura gaussiana in ogni punto di S.

Soluzione.
(i): Bisogna dimostrare che x è un diffeomorfismo con l'immagine. A tale scopo, è sufficiente osservare che (grazie allo specifico dominio su cui x è definita), un'inversa liscia di x è data da

$$(x, y, z) \mapsto \left(\arcsin \frac{z}{r}, \arctan \frac{y}{x}\right) \ .$$

(ii): Si ha

$$\begin{aligned}
x_u &= (-r\sin u\cos v, -r\sin u\sin v, r\cos u) \\
x_v &= (-(R + r\cos u)\sin v, (R + r\cos u)\cos v, 0) \\
N &= \frac{x_u \wedge x_v}{\|x_u \wedge x_v\|} = -(\cos u\cos v, \cos u\sin v, \sin u) \\
x_{uu} &= (-r\cos u\cos v, -r\cos u\sin v, -r\sin u) \\
x_{uv} &= (r\sin u\sin v, -r\sin u\cos v, 0) \\
x_{vv} &= (-(R + r\cos u)\cos v, -(R + r\cos u)\sin v, 0)
\end{aligned}$$

e quindi la prima forma fondamentale è

$$\begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & (R + r\cos u)^2 \end{pmatrix}$$

mentre la seconda è
$$\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & (R + r\cos u)\cos u \end{pmatrix}$$
Facendo il rapporto dei determinanti otteniamo
$$K = \frac{\cos u}{r(R + r\cos u)}.$$

Esercizio 3. (12 punti)
Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ la superficie
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x^2 + y^2 + z^2 = 1\} ,$$
e si consideri la regione di S definita da
$$R = S \cap \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq \frac{\sqrt{3}}{4} \right\} .$$

(i) Si dimostri che S è una superficie, e se ne determini un campo normale $N\colon S \to S^2$.
(ii) Fissata su S l'orientazione definita dalla normale trovata al punto precedente, si determini una parametrizzazione per lunghezza d'arco $\gamma\colon [0, \pi] \to S$ di ∂R coerente con l'orientazione definita da S su R (e quindi su ∂R).
(iii) Si calcoli la curvatura geodetica di γ.
(iv) Si dimostri che
$$\int_R K \,\mathrm{d}A = 2\pi \left(1 - \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}} \right)$$
dove $K\colon S \to \mathbb{R}$ è la curvatura gaussiana e dA è l'elemento d'area di S.

Soluzione. (i): Posto $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + z^2 - 1$, si ha $S = f^{-1}(0)$, per cui per mostrare che S è una superficie è sufficiente vedere che 0 è un valore regolare per f. Ma $\nabla f(x, y, z) = (8x, 2y, 2z)$ si annulla solo in $(0, 0, 0)$, che non appartiene ad S, per cui S è una superficie. Inoltre, un versore normale per S è dato da
$$N(x, y, z) = \frac{\nabla f(x, y, z)}{\|\nabla f(x, y, z)\|} = \frac{(4x, y, z)}{\sqrt{16x^2 + y^2 + z^2}} .$$

(ii): Si ha ovviamente $\partial R = S \cap \{x = h\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = \sqrt{3}/4, y^2 + z^2 = 1/4\}$, per cui ∂R è una circonferenza di raggio $1/2$, ed un parametrizzazione per lunghezza d'arco di ∂R è data da $\gamma\colon [0, \pi] \to S$,
$$\gamma(s) = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2}\cos 2s, \frac{1}{2}\sin 2s \right) .$$
Tramite un disegno non è difficile mostrare che questa parametrizzazione è peraltro coerente con l'orientazione di ∂R.

(iii): Si ha
$$\gamma'(s) = (0, -\sin 2s, \cos 2s) \ ,$$
$$\gamma''(s) = (0, -2\cos 2s, -2\sin 2s) \ .$$
Inoltre,
$$N(\gamma(s)) = \frac{\big(\sqrt{3}, 1/2\cos 2s, 1/2\sin 2s\big)}{\sqrt{13/4}} = \frac{\big(2\sqrt{3}, \cos 2s, \sin 2s\big)}{\sqrt{13}} \ ,$$

per cui

$$\kappa_g(s) = \langle N(\gamma(s)) \wedge \gamma'(s), \gamma''(s)\rangle = \frac{1}{\sqrt{13}}\langle \left(1, -2\sqrt{3}\cos 2s, -2\sqrt{3}\sin 2s\right), (0, -2\cos 2s, -2\sin 2s)\rangle = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{13}} \,.$$

(iv): La regione R è chiaramente omeomorfa ad un disco, per cui $\chi(R) = 1$. Dunque per il Teorema di Gauss-Bonnet si ha

$$\int_R K \,\mathrm{d}A = 2\pi\chi(R) - \int_{\partial R} \kappa_g = 2\pi - \pi\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{13}} = 2\pi\left(1 - \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}\right) \,.$$