Corso di Geometria e Topologia Differenziale

Appello del 13/6/2018

La durata della prova è di 2 ore e 30 minuti.

Esercizio 1. (7 punti)

(i) Sia $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva regolare con curvatura nulla. Si mostri che il supporto di γ è contenuto in una retta.

(ii) Sia $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare con torsione nulla. Si mostri che il supporto di γ è contenuto in un piano.

Soluzione.
Svolto a lezione.

Esercizio 2. (13 punti)
Sia $\alpha\colon I \to S$ una curva biregolare p.l.a. a valori in una superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$, avente riferimento di Frenet t, n, b. Si supponga che α sia una linea asintotica, cioè che abbia curvatura normale nulla in ogni punto. Siano $e_1, e_2 \in \mathcal{T}(\alpha)$ due versori lungo α tali che, per ogni $s \in I$, $e_1(s), e_2(s)$ sia una base ortonormale di $T_{\alpha(s)}S$ e $e_1(s)$, $e_2(s)$ siano direzioni principali di S relative alle curvature principali k_1 e k_2. Infine, sia $\theta\colon I \to \mathbb{R}$ una determinazione dell'angolo tra e_1 e t.

(i) Si mostri che, per ogni $s \in I$, la giacitura del piano osculatore di α in s coincide con $T_{\alpha(s)}S$.

(ii) Si mostri che, a meno di cambiare l'orientazione di S, si ha $(N \circ \alpha)'(s) = \tau(s)n(s)$ per ogni $s \in I$, e se ne deduca che $\cos^2\theta(s)k_1^2(\alpha(s)) + \sin^2\theta(s)k_2^2(\alpha(s)) = \tau^2(s)$.

(iii) Si mostri che $\cos^2\theta(s)k_1(\alpha(s)) + \sin^2\theta(s)k_2(\alpha(s)) = 0$ per ogni $s \in I$.

(iv) Si mostri che $\tau^2(s) = -K(\alpha(s))$ per ogni $s \in I$, dove K è la curvatura di Gauss.

Soluzione. Con un piccolo abuso, poniamo $N(s) = N(\alpha(s))$ per ogni $s \in I$ (e indichiamo con $f(s)$ la quantità $f(\alpha(s))$ per ogni funzione $f\colon S \to \mathbb{R}$).

(i): Poiché α è una linea asintotica, per ogni $s \in I$ si ha

$$0 = \langle N(s), \alpha''(s)\rangle = \kappa(s)\langle N(s), n(s)\rangle \ ,$$

per cui $n(s) \in T_{\alpha(s)}S$. Poiché ovviamente anche $t(s) \in T_{\alpha(s)}S$, la giacitura del piano osculatore di α in s è contenuta in $T_{\alpha(s)}S$, e per motivi dimensionali coincide con esso.

(ii): Per quanto visto al punto (i), si ha $N(s) = \pm b(s)$ per ogni $s \in I$. Per continuità, il segno nell'uguaglianza appena scritta non dipende da s, per cui a meno di invertire l'orientazione di S possiamo supporre $N(s) = b(s)$ per ogni $s \in S$. L'uguaglianza $N'(s) = \tau(s)n(s)$ segue allora dalle formule di Frenet.

Per quanto riguarda la seconda uguaglianza, osserviamo che (omettendo la dipendenza dal tempo) $t = (\cos\theta)e_1 + (\sin\theta)e_2$, da cui

$$N' = dN(t) = dN((\cos\theta)e_1 + (\sin\theta)e_2) = -k_1(\cos\theta)e_1 - k_2(\sin\theta)e_2 \ .$$

Prendendo la norma al quadrato dei membri destro e sinistro di questa uguaglianza otteniamo la tesi.

(iii): Per definizione di linea asintotica, si ha

$$0 = -\langle dN(t), t\rangle = \langle k_1(\cos\theta)e_1 + k_2(\sin\theta)e_2, (\cos\theta)e_1 + (\sin\theta)e_2\rangle = k_1\cos^2\theta + k_2\sin^2\theta \ ,$$

come voluto.

(iv) Dalle uguaglianze $k_1\cos^2\theta + k_2\sin^2\theta = 0$ e $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ otteniamo

$$\cos^2\theta = -\frac{k_2}{k_1 - k_2} \ , \qquad \sin^2\theta = \frac{k_1}{k_1 - k_2}$$

che, sostituite nella relazione trovata in (ii), danno

$$\tau^2 = -k_1k_2 = -K \ .$$

Esercizio 3. (10 punti)
Si consideri la funzione $x\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ data da

$$x(u,v) = (u - v, u + v, u^2 + v^2)$$

e sia $S = x(\mathbb{R}^2)$.

(i) Si mostri che S è una superficie, di cui x è una parametrizzazione globale.
(ii) Si determini la curvatura Gaussiana di S in ogni suo punto.
(iii) Si determini la curvatura geodetica della curva $\gamma\colon \mathbb{R} \to S$ data da

$$\gamma(s) = \left(\frac{\cos s - \sin s}{\sqrt{2}}, \frac{\cos s + \sin s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right) \ .$$

Soluzione. (i): La funzione $(x,y,z) \mapsto ((x+y)/2, (-x+y)/2)$ è un'inversa liscia di x, che è pertanto un diffeomorfismo sull'immagine. La tesi segue.

(ii): Si ha $x_u = (1,1,2u)$, $x_v = (-1,1,2v)$, da cui

$$N = \frac{x_u \wedge x_v}{\|x_u \wedge x_v\|} = \frac{(-u+v, -u-v, 1)}{\sqrt{1 + 2u^2 + 2v^2}} \ .$$

Inoltre, $x_{uu} = (0,0,2)$, $x_{vv} = (0,0,2)$ e $x_{uv} = x_{vu} = (0,0,0)$. Da ciò segue che le matrici della prima e della seconda forma fondamentale sono date rispettivamente da

$$\begin{pmatrix} 2 + 4u^2 & 4uv \\ 4uv & 2 + 4v^2 \end{pmatrix} \ , \qquad \frac{1}{\sqrt{1 + 2u^2 + 2v^2}} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \ .$$

Essendo il rapporto dei determinanti della seconda e della prima forma fondamentale, la curvatura Gaussiana è data da

$$K(u,v) = \frac{1}{(1 + 2u^2 + 2v^2)^2} \ .$$

(iii): Osserviamo innanzi tutto che

$$\gamma'(s) = \left(\frac{-\sin s - \cos s}{\sqrt{2}}, \frac{-\sin s + \cos s}{\sqrt{2}}, 0\right) \ ,$$

da cui $\|\gamma'(s)\| = 1$ per ogni $s \in \mathbb{R}$. Dunque γ è p.l.a. Inoltre,

$$\gamma''(s) = \left(\frac{-\cos s + \sin s}{\sqrt{2}}, \frac{-\cos s - \sin s}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

Inoltre, posto $u(s) = (\cos s)/\sqrt{2}$, $v(s) = (\sin s)/\sqrt{2}$, è chiaro che $\gamma(s) = x(u(s), v(s))$ per ogni $s \in \mathbb{R}$, per cui la normale in $\gamma(s)$ risulta essere

$$N(\gamma(s)) = \frac{(\sin s - \cos s, -\sin s - \cos s, \sqrt{2})}{2} \ .$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
\kappa_g(s) &= \langle \gamma''(s), N(s) \wedge \gamma'(s) \rangle \\
&= \frac{1}{4} \left\langle \begin{pmatrix} -\cos s + \sin s \\ -\cos s - \sin s \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin s - \cos s \\ -\sin s - \cos s \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\sin s - \cos s \\ -\sin s + \cos s \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= \frac{1}{4} \left\langle \begin{pmatrix} -\cos s + \sin s \\ -\cos s - \sin s \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2}(\sin s - \cos s) \\ -\sqrt{2}(\sin s + \cos s) \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2} \ .
\end{aligned}$$