Corso di Geometria e Topologia Differenziale

Appello del 15/7/2019

La durata della prova è di 2 ore e 30 minuti.

Esercizio 1. (9 punti)
Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie connessa ed orientata tale che ogni punto di S sia ombelicale (cioè dN_p sia un multiplo dell'identità per ogni $p \in S$). Si mostri che S è una porzione di un piano o di una sfera.

Soluzione. Svolto a lezione.

Esercizio 2. (9 punti)
Sia $\gamma \colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva biregolare. Per ogni $s \in I$, sia $H(s)$ la giacitura del piano osculatore a γ in s. Si supponga che esista un vettore $v \in \mathbb{R}^3$, $v \neq 0$ tale che $v \in H(s)$ per ogni $s \in I$. Si mostri che γ è piana.

Soluzione. Indichiamo con t, n, b il triedro di Frenet di γ, e con κ, τ la curvatura e la torsione di γ. Una curva biregolare è piana se e solo se ha torsione identicamente nulla, per cui è sufficiente dimostrare che $\tau(s) = 0$ per ogni $s \in I$.

Per ipotesi esistono funzioni $\alpha, \beta \colon I \to \mathbb{R}$ tali che

$$\alpha(s)t(s) + \beta(s)n(s) = v$$

per ogni $s \in I$, e poiché $\alpha(s) = \langle v, t(s)\rangle$ e $\beta(s) = \langle v, n(s)\rangle$, tali funzioni sono lisce. Derivando questa uguaglianza e utilizzando le formule di Frenet si ottiene (omettendo la dipendenza da s)

$$(\alpha' - \beta\kappa)t + (\beta' + \alpha\kappa)n - \beta\tau b = 0 \ ,$$

da cui si deduce che

$$\beta(s)\tau(s) = 0 \text{ per ogni } s \in I \ .$$

Supponiamo per ora assurdo che esista $s_0 \in I$ tale che $\tau(s_0) \neq 0$. Per continuità di τ, esiste un intorno J di s_0 in I tale che $\tau(s) \neq 0$ per ogni $s \in J$. Poiché $\beta\tau \equiv 0$, si ha allora $\beta(s) = 0$ per ogni $s \in J$, da cui $v = \alpha(s)t(s)$ per ogni $s \in J$. Ne segue che $\alpha(s) \neq 0$ per ogni $s \in J$, e che $t(s)$ ha direzione costante, ed è dunque costante, al variare di $s \in J$. Ciò viola il fatto che γ sia biregolare, e conclude la dimostrazione.

Esercizio 3. (12 punti)
Siano $R, S \subseteq \mathbb{R}^3$ i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ definiti da

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^4 = 2\} \ , \quad R = S \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z \geq 1\} \ .$$

(i) Si mostri che S è una superficie, se ne calcoli un versore normale $N \colon S \to S^2$ e si fissi l'orientazione di S coerente con N.

(ii) Si mostri che R è una regione di S diffeomorfa a un disco, e si dia una parametrizzazione $\gamma \colon [0, l] \to \partial R$ per lunghezza d'arco di ∂R che sia coerente con l'orientazione indotta da R su ∂R.

(iii) Si calcoli la curvatura geodetica di γ in ogni suo punto.

(iv) Si calcoli

$$\int_R K\, dA \ ,$$

dove K è la curvatura Gaussiana e dA è la forma d'area su S.

Soluzione. (i): L'insieme S è luogo di zeri della funzione $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^4 - 2$, il cui gradiente $\nabla f = (2x, 2y, 4z^3)$ si annulla solo nell'origine. Poiché l'origine non appartiene a S, se ne deduce che S è una superficie. Un suo versore normale è dato da

$$N(x,y,z) = \frac{\nabla f(x,y,z)}{\|\nabla f(x,y,z)\|} = \frac{(x,y,2z^3)}{\sqrt{x^2+y^2+4z^6}} \ .$$

(ii): Sia $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1\}$. Dimostriamo che la proiezione $\pi\colon R \to D$ è un diffeomorfismo, il che prova che R è una regione di S diffeomorfa ad un disco. Se $(x,y,z) \in R$, allora $z \ge 1$, per cui $x^2 + y^2 = 2 - z^4 \le 2 - 1 = 1$, per cui effettivamente $\pi(R) \subseteq D$. Inoltre, è immediato verificare che π ammette l'inversa liscia $\pi^{-1}\colon D \to R$ data da $\pi^{-1}(x,y) = (x, y, \sqrt[4]{2 - x^2 - y^2})$, per cui π è un diffeomorfismo.

Infine, una parametrizzazione per lunghezza d'arco di ∂R è data da

$$\gamma\colon [0, 2\pi] \to \partial R\,, \quad \gamma(t) = (\cos t, \sin t, 1) \ .$$

È facile verificare che tale parametrizzazione è anche coerente con l'orientazione di ∂R.

(iii): Detta κ_g la curvatura geodetica di γ, abbiamo

$$\kappa_g(t) = \langle \gamma''(t), N(\gamma(t)) \wedge \gamma'(t) \rangle \ .$$

Ora

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 0)\,, \quad \gamma''(t) = (-\cos t, -\sin t, 0)\,, \quad N(\gamma(t)) = \frac{(\cos t, \sin t, 2)}{\sqrt{5}} \ .$$

Dunque

$$\kappa_g(t) = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

per ogni $t \in [0, 2\pi]$.

(iv) Osserviamo che $\chi(R) = \chi(D) = 1$. Per il Teorema di Gauss-Bonnet abbiamo allora

$$2\pi = 2\pi\chi(R) = \int_R K\, dA + \int_0^{2\pi} \frac{2}{\sqrt{5}} dt = \int_R K\, dA + \frac{4\pi}{\sqrt{5}} \ ,$$

da cui

$$\int_R K\, dA = 2\pi - \frac{4\pi}{\sqrt{5}} = \left(2 - \frac{4}{\sqrt{5}}\right)\pi \ .$$