

Programma svolto nel corso “Geometria Riemanniana”  
(anno accademico 2012-2013, docente: Roberto Frigerio)

1. Richiami: Varietà differenziabili, fibrato tangente, fibrato delle forme bilineari, metriche Riemanniane. Distanza Riemanniana, curve localmente e globalmente minimizzanti.
2. Spazi di lunghezze: definizione ed esempi. Uno spazio di lunghezze completo per cui l'esistenza di curve minimizzanti non è garantita. Spazio di lunghezze associato ad uno spazio metrico generico.
3. Richiami: derivazioni, vettori tangenti e campi vettoriali. Il caso di  $\mathbb{R}^n$  ed il caso generale. Campi lungo curve. Derivazione di campi lungo campi. Flusso di un campo vettoriale. La derivata di Lie dipende localmente (ma non puntualmente) dai suoi argomenti. Connessioni lineari e derivate covarianti. La connessione di Levi-Civita. Campi paralleli. Geodetiche. Mappa esponenziale. Coordinate normali. Raggio di iniettività. Le geodetiche sono localmente minimizzanti. Esistenza di intorni uniformemente normali. Esistenza di intorni geodeticamente convessi (Teorema di Whitehead). Una curva minimizzante è, a meno di riparametrizzazioni, una geodetica. Definizione di isometria e di isometria locale.
4. Sottovarietà. La connessione di Levi-Civita di una sottovarietà. Lo spazio Euclideo: connessione, geodetiche e distanza. Il modello dell'iperboloido: definizione della metrica, calcolo della connessione di Levi-Civita ed equazione delle geodetiche.
5. Le isometrie locali preservano la connessione di Levi-Civita e le geodetiche. Un'isometria è completamente determinata dal suo differenziale in un punto. Spazi omogenei e isotropi. La sfera: connessione, geodetiche, distanza, raggio di iniettività. La sfera è omogenea e isotropa. Gruppo di isometrie della sfera. Lo spazio iperbolico: parametrizzazione esplicita delle geodetiche, calcolo del raggio di iniettività. Lo spazio iperbolico è omogeneo e isotropo. Gruppo delle isometrie dello spazio iperbolico. Il modello del disco dello spazio iperbolico: costruzione esplicita della metrica Riemanniana e descrizione delle geodetiche.
6. Se tutte le geodetiche uscenti da un punto  $p$  di una varietà Riemanniana sono definite su  $\mathbb{R}$ , allora la distanza tra  $p$  e ogni altro punto è realizzata da una geodetica minimizzante. Il Teorema di Hopf-Rinow.

7. Definizione di curvatura di Riemann. La curvatura di Riemann è un tensore. Alcune proprietà della curvatura di Riemann. La prima identità di Bianchi. Definizione di curvatura sezionale. Le curvature sezionali determinano il tensore di Riemann.
8. Correzione del primo foglio di esercizi.
9. Definizione dell'operatore forma per sottovarietà. Il caso delle ipersuperficie: un analogo del differenziale della mappa di Gauss. Formula di Gauss per la curvatura e per le curvature sezionali di una sottovarietà. Il Teorema Egregium di Gauss.
10. Curvatura sezionale della sfera e dello spazio iperbolico.
11. Variazione di una curva, campi lungo variazioni. Variazione geodetica. Campi di Jacobi. Dimensione dello spazio dei campi di Jacobi. Alcuni esempi di campi di Jacobi. Definizione e proprietà dei campi di Jacobi propri. Caratterizzazione dei campi di Jacobi che si annullano in un punto. Definizione di punto coniugato e di ordine di un punto coniugato. Relazione tra punti coniugati e singolarità dell'esponenziale. In varietà di curvatura non positiva non esistono punti coniugati.
12. Definizione e proprietà di base dei rivestimenti Riemanniani. Rivestimenti e completezza. Il Teorema di Cartan-Hadamard.
13. Trasporto parallelo della curvatura sezionale. Una caratterizzazione delle isometrie locali dovuta a Cartan. Caratterizzazione locale e globale degli spazi con curvatura costante. Espressione della curvatura di Riemann negli spazi di curvatura costante. Campi di Jacobi negli spazi di curvatura costante.
14. Variazione seconda della lunghezza. Variazione seconda e campi di Jacobi. Una geodetica che contiene punti coniugati non è minimizzante.
15. Il tensore di Ricci. Il Teorema di Bonnet-Myers.
16. Studio del comportamento locale della metrica in funzione della curvatura. Stime bilaterali sulla distanza nell'intorno di un punto. Relazioni tra l'angolo Riemanniano tra due geodetiche uscenti da un punto e angoli in opportuni triangoli di confronto euclidei. Il Teorema di confronto di Rauch. Stime dal basso locali e globali della distanza Riemanniana in funzione della curvatura sezionale. Confronto tra la distanza in una varietà con curvatura limitata dall'alto e il corrispondente modello a curvatura costante.

17. Lunghezza di curve in spazi metrici. Geodetiche e geodetiche locali: confronto tra la nozione riemanniana e quella metrica. Teorema del coseno negli spazi a curvatura costante. Esistenza e unicità dei triangoli di confronto nei modelli a curvatura costante. Definizione di angolo di Alexandrov. Coincidenza dell'angolo di Alexandrov con l'angolo Riemanniano in varietà Riemanniane. Gli angoli di Alexandrov definiti da geodetiche uscenti da un punto fissato verificano la disuguaglianza triangolare. Teorema di Myers-Steenrod: una bigezione tra varietà Riemanniane che preservi la distanza è un'isometria Riemanniana.
18. Lemma di Alexandrov. Definizione di spazio  $CAT(k)$ . Uno spazio  $CAT(0)$  è contraibile. Varie condizioni equivalenti alla condizione  $CAT(k)$ . Una varietà Riemanniana è localmente  $CAT(k)$  se e solo se ha curvatura sezionale minore o uguale a  $k$ . Se  $k \leq 0$ , una varietà Riemanniana semplicemente connessa e completa con curvatura sezionale minore o uguale a  $k$  è globalmente  $CAT(k)$ . Una geodetica locale in uno spazio  $CAT(0)$  è una geodetica globale.
19. Azioni isometriche di gruppi su spazi metrici. Definizione di spazio geodetico proprio. Definizione di azione propria, azione libera, azione cocompatta. Definizione di isometria ellittica, iperbolica, parabolica, semisemplice. Le isometrie di un'azione propria e cocompatta sono semisemplici. Un'isometria iperbolica di uno spazio  $CAT(0)$  ammette un asse, che è unico se lo spazio è  $CAT(-1)$ . Un'isometria iperbolica di uno spazio  $CAT(0)$  ha ordine infinito. Studio dei gruppi abeliani di isometrie iperboliche di spazi  $CAT(-1)$ .
20. Se  $M$  è una varietà compatta di curvatura non positiva, allora il gruppo fondamentale di  $M$  è infinito e privo di torsione. Teorema di Preissmann: se  $M$  è una varietà compatta di curvatura negativa, allora ogni sottogruppo abeliano del gruppo fondamentale di  $M$  è banale o ciclico infinito.