

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale
Analisi Matematica 1 - Foglio di esercizi n.ro 1 del 02/10/19

1. Siano A, B e X insiemi tali che $A \subseteq X, B \subseteq X$. Si mostri che

$$X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B).$$

2. Sia $A = \{n \in \mathbb{N} \text{ tali che } \sqrt{n} \text{ è un numero intero}\}$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false:

$$9 \in A, \quad \{9\} \in A, \quad \{9, 16\} \subseteq A, \quad 9 \subseteq A, \quad \emptyset \in A, \quad \emptyset \subseteq A, \quad 5 \in A, \\ \{9\} \subseteq \mathcal{P}(A), \quad \emptyset \subseteq \mathcal{P}(A), \quad \{\emptyset\} \subseteq \mathcal{P}(A), \quad \emptyset \in \mathcal{P}(A), \quad \{4\} \subseteq \mathcal{P}(A), \quad \{4\} \in \mathcal{P}(A).$$

3. Siano $A = \{\text{comuni italiani con più di 10000 abitanti}\}$, $B = \{\text{numeri interi positivi}\}$. Si dica quali delle seguenti leggi definisce una funzione $f: A \rightarrow B$.

$$f(x) = \text{numero di abitanti di } x, \quad f(x) = \text{numero delle lettere del nome di } x,$$

$$f(x) = \text{altezze in cm degli abitanti di } x.$$

Per ogni f tra quelle elencate che sia una funzione, si dica se essa sia iniettiva e/o surgettiva (supponiamo che non esistano due comuni in Italia con più di 10000 abitanti aventi lo stesso numero di abitanti).

4. Siano $A = \{\text{studenti dell'Università di Pisa}\}$, $B = \{\text{lettere dell'alfabeto}\}$. Si dica quali delle seguenti è una funzione

$$f: A \rightarrow B, \quad f(x) = \text{iniziale del cognome di } x,$$

$$g: B \rightarrow A, \quad g(x) = \text{studenti il cui cognome inizia per } x.$$

5. Siano X, Y, Z insiemi e $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ funzioni. Dimostrare che

- a) Se f, g sono iniettive, allora $g \circ f$ è iniettiva;
- b) Se f, g sono surgettive, allora $g \circ f$ è surgettiva.
- c) Se f, g sono bigettive, allora $g \circ f$ è bigettiva.
- d) Se $g \circ f$ è iniettiva, allora f è iniettiva.
- e) se $g \circ f$ è surgettiva, allora g è surgettiva.

6. Siano X, Y insiemi e $f: X \rightarrow Y$ una funzione. Siano inoltre A, A_1, A_2 sottoinsiemi di X e B, B_1, B_2 sottoinsiemi di Y . Dimostrare che:

- a) $f(A) \subseteq B$ se e solo se $A \subseteq f^{-1}(B)$;
- b) $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$;
- c) $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$;

- d) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$;
e) $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$.

7. Si mostri che

$$\sum_{i=0}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} .$$

8. Si determinino i valori di $n \in \mathbb{N}$ per cui valga

$$5^n > 3^n + 4^n .$$

9. Si mostri che

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1} .$$