Integrazione

Due problemi di "*integrazione*", a priori di natura molto diversa.

Integrale indefinito.

Data $f : I \to \mathbb{R}$ *una funzione definita su un intervallo aperto* I*, determinare*

$\int f(x)dx := \{F : I \to \mathbb{R};\ F' = f\}$

l'insieme delle **primitive** *di* f*.*

Osservazioni:

(1) L'insieme delle primitive di f è detto anche il suo *integrale indefinito*. Il simbolo

$\int f(x)dx$

è una notazione tradizionale e diremo dopo qualcosa sulle sue origini. Per adesso è sostanzialmente arbitraria. Potevamo chiamare l'insieme delle primitive di f, per esempio, $I(f)$ e nulla cambiava. Anche la 'x' non ha alcun significato intrinseco, potevamo, per esempio, scrivere equivalentemente $\int f(t)dt$.

(2) Se l'insieme $\int f(x)dx \neq \emptyset$ e $F_0 \in \int f(x)dx$ è una particolare primitiva allora

$$\int f(x)dx = \{G : I \to \mathbb{R};\ \exists C \in \mathbb{R},\ G = F_0 + C\}$$

$G = F_0 + C$ vuol dire che per ogni $x \in I$,

$$G(x) = F_0(x) + C.$$

A volte scriveremo anche $\int f(x)dx = F_0 + \mathbb{R}$.

(3) L'insieme $\int f(x)dx$ può essere **vuoto**.

Esempio 1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$f(x) = 0$ se $x \leq 0$, $f(x) = 1$ se $x > 0$.

La funzione f non ammette primitive. Supponiamo per assurdo che $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sia una primitiva di f. Allora le restrizioni $F_{\mp}$ di F alle due semirette aperte $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$ sono primitive delle restrizioni $f_{\mp}$ di f. La funzione G_- costante uguale a 0 è una primitiva di f_-, mentre $G_+(x) = x$ è una primitiva di f_+. Quindi esistono costanti $C_{\mp}$ tali che $G_{\mp} = F_{\mp} + C_{\mp}$. La primitiva F è continua su $\mathbb{R}$ (perché è derivabile), la continuità in 0, impone che $C_- = C_+ = C$. Quindi F è della forma

$F(x) = C$ se $x \leq 0$, $F(x) = x + C$ se $x > 0$.

F non è derivabile in 0. Quindi F non può essere una primitiva di f su $\mathbb{R}$.

Esempio 2. Nell'esempio precedente la funzione f senza primitive non è continua in 0. D'altra parte esistono funzioni non continue in qualche punto che ammettono primitive. Per esempio la funzione (già vista come esempio di funzione derivabile non C^1)

$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = x^2 \sin(1/x)$ se $x \neq 0$, $F(0) = 0$

è derivabile su $\mathbb{R}$, ma la sua derivata $f = F'$ non è continua in 0 (e non è monotona).

Integrale definito.

Si considerino le funzioni $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ **limitate e non negative** definite su qualche intervallo chiuso e limitato $[a, b]$, $a < b$. Data una tale funzione, definiamo la regione del piano:

$$T(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

Problema. *Determinare una procedura detta di* **integrazione definita** *che individui un sottoinsieme di tali funzioni (che sarà detto l'insieme delle* **funzioni integrabili** *secondo la procedura) per le quali sia possibile* **misurare l' area** *(non negativa) di $T(f)$, avendo preso come unità di misura delle aree il quadrato di base $[0, 1]$. Richiediamo inoltre che tale procedura sia compatibile con la misurazione elementare dell' area dei rettangoli: se $f = c$ costante, $c > 0$, allora l'area di $T(f)$ è $(b - a)c$.*

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è integrabile (rispetto a una data procedura) indicheremo l'area di $T(f)$ con il simbolo

$\int_a^b f(x)dx$

anche detto *l'integrale definito* di f (secondo la procedura considerata).

Una procedura di integrazione definita è tanto più interessante quanto più è ampio il corrispondente insieme delle funzioni integrabili.

Per esempio, possiamo certamente considerare la procedura per cui le uniche funzioni integrabili sono quelle costanti $f(x) = C \geq 0$ e per cui l'area di $T(f)$ è l'area elementare del rettangolo $[a, b] \times [0, C]$. Ma questa procedura è troppo povera.

Possiamo precisare il problema richiedendo che una procedura di integrazione definita verifichi inoltre che:

L'insieme delle funzioni integrabili secondo la procedura contiene almeno le funzioni continue (che sono automaticamente limitate).

Estensione alle funzioni di segno variabile definite su intervalli orientati.

Riferendoci alla discussione fatta sull'area "algebrica" dei rettangoli orientati, possiamo estendere la questione anche a funzioni non necessariamente non-negative e definite su intervalli chiusi e limitati orientati non necessariamente positivamente. Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è come sopra ed è integrabile, invertendo l'orientazione dell'intervallo di definizione è naturale porre

$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$

Se f è non positiva, è naturale stipulare che è integrabile se e solo se $-f$ lo è e porre

$\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b (-f(x))dx.$

Più in generale, se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è a segni variabili, è integrabile se è definita l' area "algebrica" della regione del piano compresa tra l'asse delle x e il grafico della funzione che sarà egualmente indicata $\int_a^b f(x)dx$.

Nel caso di un intervallo degenere, $a = b$, è naturale porre $\int_a^a f(x)dx = 0$.

E' stata definita la procedura di

Integrazione definita secondo Riemann.

Essa verifica le richieste, in particolare:

Ogni funzione continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *è integrabile secondo Riemann.*

Ogni funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *monotona (non necessariamente continua) è integrabile secondo R.*

Esistono funzioni **non** *integrabili (secondo R.) L'esempio fondamentale è la funzione*

$D : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $D(x) = 1$ *se* $x \in \mathbb{Q}$, $D(x) = 0$ *se* $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Altre proprietà dell'integrazione secondo R.

Linearità. Se $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sono entrambe integrabili (secondo R.) allora $f+g$ lo è, inoltre

$$\int_a^b (f+g)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Per ogni $c \in \mathbb{R}$, cf è integrabile e

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx.$$

Additività sugli intervalli. Sia $a < c < b$. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, se le sue restrizioni su $[a, c]$ e $[c, b]$ sono integrabili, allora f è integrabile e

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Disuguaglianze. $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabili, $g(x) \geq f(x)$ per ogni $x \in [a, b]$, allora

$\int_a^b g(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx$

f e $|f|$ integrabili, allora

$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

Il teorema fondamentale del calcolo integrale

Esso stabilisce un punto di contatto tra i due problemi di integrazione che, come già osservato, sono a priori di natura piuttosto diversa. Si tratta in effetti di un pacchetto di enunciati.

(1) Sia $f : I \to \mathbb{R}$ definita su un intervallo aperto I, $[a, b] \subset I$. Supponiamo che la restrizione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sia integrabile secondo Riemann e che l'integrale indefinito di f, $\int f(x)dx$, sia non vuoto. Per ogni primitiva $F : I \to \mathbb{R}$ di f, si ha che $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Si usa anche la notazione

$[F(x)]_a^b := F(b) - F(a).$

(2) Sia $f : I \to \mathbb{R}$ **continua***. Allora l'integrale indefinito* $\int f(x)dx \neq \emptyset$*.*

Più precisamente, poiché la restrizione di f *ad ogni* $[a, b] \subset I$ *è integrabile secondo Riemann, per ogni* $x_0 \in I$ *è definita*

La funzione integrale di punto base x_0 *:*

$F_{x_0}(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$.

Allora $F_{x_0}(x)$ *è una primitiva di* f*.*

Osservazioni varie.

(a) Se $f : I \to \mathbb{R}$ è continua, il punto (1) del teorema fondamentale è conseguenza del punto (2). Infatti, la differenza $F(b) - F(a)$ non dipende dalla scelta della primitiva F di f. Possiamo usare come primitiva una funzione integrale F_{x_0}. Allora

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_0} f(t)dt + \int_{x_0}^b f(t)dt =$$

$$\int_{x_0}^b f(t)dt - \int_{x_0}^a f(t)dt = F_{x_0}(b) - F_{x_0}(a)$$

dove la prima uguaglianza vale per l'addittività sugli intervalli, la seconda per le considerazioni fatte sulle aree "algebriche".

(b) Sia $f : I \to \mathbb{R}$ continua. In generale non tutte le primitive di f sono funzioni integrali per qualche punto base x_0. Per esempio, se $f(x) = 0$ per ogni x, allora per ogni x_0 la corrispondente funzione integrale è a sua volta $F_{x_0}(x) = 0$ per ogni x, mentre una qualsiasi funzione costante è una primitiva di f.

(c) Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua, il suo integrale definito può essere ottenuto implementando la seguente procedura:

Per ogni $m \geq 1$ suddividiamo l'intervallo $[a, b]$ in m intervalli $[x_{j-1}, x_j]$, $x_0 = a$, $x_m = b$, $j = 1, \ldots, m$, di lunghezza $(b-a)/m$; scegliamo $y_j \in [x_{j-1}, x_j]$. Poniamo

$s_m(f) := \sum_{j=1}^{m} \frac{b-a}{m} f(y_j)$

allora

$\int_a^b f(x)dx = \lim_{m\to\infty} s_m(f)$

(d) Sia $f : I \to \mathbb{R}$. Affinché siano definite le funzioni integrali $F_{x_0}(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$, non è necessario che f sia continua. Basta che f verifichi la proprietà che per ogni $[a,b] \subset I$, la restrizione di $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sia integrabile secondo R. Per esempio f monotona (non necessariamente continua) ha tale proprietà. In generale queste funzioni integrali non sono primitive di f.

Esempio 3. Prendiamo la funzione già considerata nell' esempio 1: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 0$ se $x \leq 0$, $f(x) = 1$ se $x > 0$. Sappiamo che non ha primitive. D'altra parte è monotona. In particolare, la funzione integrale di punto base $x_0 = 0$ è la funzione $F(x) = 0$ se ≤ 0, $F(x) = x$ se $x > 0$. Essa è continua su $\mathbb{R}$ ma non è derivabile in 0, confermando che non è una primitiva di f.

Supponiamo come sopra che siano definite le funzioni integrali F di $f : I \to \mathbb{R}$ ma che f non sia necessariamente continua. Le funzioni integrali sono *più regolari* di f. Adattando la dimostrazione del teorema fondamentale si verifica che:

(1) Ogni funzione integrale è continua

(2) Se f è continua in un punto a, allora F è derivabile in a e $F'(a) = f(a)$.

Complementi sull'integrazione definita.

Ogni procedura di integrazione definita porta la classe dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ *misurabili* (secondo la procedura).

Dato un sottoinsieme X di $\mathbb{R}$ la sua *funzione indicatrice* $1_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, è definita da $1_X(x) = 1$ se $x \in X$, $1_X(x) = 0$ altrimenti. Indichiamo ugualmente 1_X la sua restrizione ad ogni sottoinsieme Y di $\mathbb{R}$ tale che $X \subset Y$.

Un sottoinsieme X di $\mathbb{R}$ è **misurabile** *se è limitato e la sua funzione indicatrice $1_X : [a,b] \to \mathbb{R}$ è integrabile, dove $a = \inf(X)$, $b = \sup(X)$. In tal caso*

$\mu(X) := \int_a^b 1_X(x)dx$ *è la misura di X.*

In particolare, se $X = [a,b]$, $\mu([a,b]) = b - a$ cioè la lunghezza elementare dell'intervallo.

Un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ *è* **trascurabile** *se è misurabile e* $\mu(X) = 0$.

Per esempio, i sottoinsiemi *finiti* sono trascurabili secondo Riemann (e secondo una qualsiasi altra procedura).

Si dice che due funzioni $f, g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ sono *uguali quasi-ovunque* se lo sono sul complementare di un sottoinsieme trascurabile contenuto in $[\alpha, \beta]$. Se f è integrabile e g è quasi-ovunque uguale a f, allora anche g è integrabile e $\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

Diciamo che una procedura di integrazione definita è "buona" se per ogni $[a, b]$, l'unione **finita o numerabile** di insiemi trascurabili di $[a, b]$ è trascurabile. In particolare

Ogni sottoinsieme limitato **numerabile** *è trascurabile*

L'integrazione secondo Riemann **non** è buona. $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ è numerabile ma non è misurabile. Infatti $1_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ è l'esempio base di funzione non integrabile secondo R.

Per molti usi pratici (per esempio se si lavora con funzioni continue o addirittura elementari), l'integrazione secondo Riemann è sufficiente. Non lo è per usi più avanzati (anche di interesse applicativo). Esiste una procedura buona, che incorpora ed estende quella di Riemann, nota come *integrazione secondo Lebesgue*.

Il problema dell'integrazione esplicita delle funzioni elementari.

Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile elementare. Sappiamo che è C^∞ e che tutte le derivate sono elementari. Sia F una primitiva di f (che esiste per il teorema fondamentale).

È vero che anche F è elementare? Se conosco una formula che realizza f in quanto funzione elementare, posso determinare esplicitamente una formula che realizza F?

In generale la risposta è **No**. Cè un teorema (difficile) dovuto a Liouville che fornisce un criterio per individuare le funzioni elementari con primitive elementari (e quelle con primitive non-elementari). Per esempio, si può mostrare che le funzioni $f(x) = e^{x^2}$, $f(x) = \sin(x)/x$ non hanno primitive elementari.

Attenzione: A volte si trova scritto, per esempio, che la funzione $f(x) = e^{x^2}$ *non è integrabile*. Questo può essere fuorviante. Per il teorema fondamentale essa **è** integrabile (cioè il suo integrale indefinito è non vuoto) perché è continua. Si deve intendere che *non è integrabile esplicitamente per mezzo di primitive elementari*.

D'altra parte, vedremo esempi di integrazione esplicita per qualche classe di funzioni elementari.

Altre osservazioni

• Quando si dice che

Il teorema fondamentale fornisce anche un modo "pratico" di calcolare gli integrali definiti $\int_a^b f(x)dx$ *per mezzo di una primitiva* $F(x)$ *di* $f(x)$

di fatto si ha come retro-pensiero che F sia elementare e possa essere calcolata esplicitamente.

In certi casi invece, non si può fare meglio che usare come primitiva di una funzione (continua) $f(x)$ una sua *funzione integrale*

$F(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$

Si vede allora bene che quella 'utilità pratica' svanisce perché questa primitiva è espressa mediante l'integrale definito ("il cane si morde la coda").

• A seconda del contesto ci possono essere altre vie per determinare 'esplicitamente' una primitiva. La funzione $f(x) = e^{x^2}$, per esempio, è analitica (in un intorno di zero), con serie di Taylor con raggio di convergenza $R = +\infty$

$f(x) = e^{x^2} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} x^{2n}$

Quindi una primitiva è la somma della serie di potenze primitiva, che possiamo scrivere esplicitamente, anche se $f(x)$ non ha primitive elementari:

$F(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)n!} x^{2n+1}$

per ogni $[a, b] \subset \mathbb{R}$, l'integrale definito

$\int_a^b e^{x^2} dx = F(b) - F(a)$

può essere stimato usando la serie di potenze primitiva.

Si noti tra l'altro che anche nel caso in cui sia nota la formula di $F(x)$, ad esempio

$\int_a^b \cos(x)dx = \sin(b) - \sin(a)$

in generale il valore **numerico** dell'integrale definito può essere solo approssimato (con un errore arbitrariamente piccolo) ma non conosciuto esattamente.

Anche disponendo solo di una funzione integrale come primitiva, a volte la si può studiare qualitativamente.

Esempi

• sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e consideriamo

$$f(x) = 1 + g^2(x)$$

che è a sua volta continua. Consideriamo la sua primitiva data dalla funzione integrale

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

$F(0) = 0$. $F'(x) = f(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, quindi F è strettamente crescente, 0 è l'unico zero di F. $f(x) > 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Quindi per ogni $x > 0$,

$$F(x) > \int_0^x 1dt = x.$$

Se $x < 0$,

$-F(x) = \int_x^0 f(t)dt > \int_x^0 1dt = -x$, $F(x) < x$.

Quindi

$\lim_{x\to\pm\infty} F(x) = \pm\infty$

$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è invertibile con inversa ovunque derivabile.

• Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, si $F = F_0$. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è **dispari**, allora per ogni $x \geq 0$,

$\int_{-x}^x f(t)dt = -F(-x) + F(x) = 0$, $F(-x) = F(x)$, $F(x)$ è pari.

Se f è pari

$\int_{-x}^x f(t)dt = -F(-x)+F(x) = 2F(x) = \int_0^x f(t)dt$, $F(-x) = -F(x)$, $F(x)$ è dispari.

$f(x) = e^{x^2}$ è pari. $F(0) = 0$, $F'(x) = f(x) > 0$ per ogni x, quindi $F(x)$ è strettamente crescente, $x = 0$ è l'unico zero di $F(x)$. Se $t > 1$, $e^{t^2} > e^t$, se $x > 1$,

$F(x) = \int_0^1 e^{t^2} dt + \int_1^x e^{t^2} dt >$

$C + \int_1^x e^t dt = C + e^x - e$

Quindi

$\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$

Poiché $F(-x) = -F(x)$, $\lim_{x \to -\infty} F(x) = -\infty$.

Primi esempi di integrali indefiniti.

• Ogni tabella di derivate di funzioni è anche una tabella di primitive di funzioni. Quindi conosciamo l'integrale indefinito di parecchie funzioni fondamentali.

Sottointendendo l'intervallo di definizione:

$\int 0 dx = \mathbb{R}$, $\int 1 dx = x + \mathbb{R}$,

$\int (\sum_{m=0}^{n} a_m x^m) dx = (\sum_{m=0}^{n} \frac{a_m}{m+1} x^{m+1}) + \mathbb{R}$

Si osserva che sia le derivate che le primitive di una funzione polinomiale sono funzioni polinomiali.

$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + \mathbb{R}$,

$\int \cos(x) dx = \sin(x) + \mathbb{R}$

$\int e^x dx = e^x + \mathbb{R}$

$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \text{arctan}(x) + \mathbb{R},$

Si osserva che $\frac{1}{1+x^2}$ è razionale, quindi tutte le sue derivate sono funzioni razionali, mentre le sue primitive non lo sono.

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \text{arcsin}(x) + \mathbb{R}$, etc.

• Sia $g : I \to \mathbb{R}$, derivabile e tale che $g(x) \neq 0$ per ogni $x \in I$. Allora $F(x) = \log(|g(x)|)$ è derivabile e $F'(x) = g'(x)/g(x) := f(x)$. Quindi $\int f(x)dx = \log(|g(x)|) + \mathbb{R}$.

Infatti, poichè $g(x)$ è continua e mai nulla, per il teorema degli zeri ha segno costante. Ne segue che $|g(x)| = g(x)$ oppure $|g(x)| = -g(x)$ per ogni $x \in I$. Il risultato segue, in entrambi i casi, per la regola di derivazione delle funzioni composte.

Per esempio, $f(x) = -\sin(x)/\cos(x)$,

$I = (\pi/2, 3\pi/2)$,

$\int f(x)dx = \log(|\cos(x)|) + \mathbb{R}$.

Proprietà dell'integrale indefinito.

Si tratta sostanzialmente di riformulazioni di proprietà già note delle derivate.

Linearità. Siano $f, g : I \to \mathbb{R}$ con rispettive primitive F e G. Allora $F + G$ è una primitiva di $f + g$. Per ogni $c \in \mathbb{R}$, cF è una primitiva di cf.

Integrazione per parti. Siano f, g, F, G come sopra. Ricordiamo la regola di derivazione di un prodotto di funzioni.

$(FG)' = fG + Fg$

Usando la linearità otteniamo

$\int fGdx + \int Fgdx = FG + \mathbb{R}.$

Questa relazione viene spesso riscritta e usata nella forma

$\int fGdx = FG - \int Fgdx$

e si interpreta dicendo che FG "integra parzialmente" la funzione fG e resta da integrare la parte Fg. A volte Fg è più trattabile di fG.

Esempi di integrali indefiniti espliciti ottenuti per integrazione per parti e linearità.

• $a, b \in \mathbb{R}$. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{ax}{x^2+b^2}$. Usando la linearità

$$\int f(x)dx = (a/2) \int \frac{2x}{x^2+b^2} dx =$$

$$(a/2) \log(x^2 + b^2) + \mathbb{R}.$$

Ancora si osservano primitive non-razionali di una funzione razionale.

- $\int \log(x)dx = x\log(x) - \int x(1/x)dx =$

$= x\log(x) - x + \mathbb{R}.$

- $\int \arctan(x)dx = x\arctan(x) - \int x/(1+x^2)dx =$

$x\arctan(x) - (1/2)\log(1+x^2) + \mathbb{R}$

• Vogliamo determinare

$\int x \cos(x) dx$

usando l'integrazione per parti. Se poniamo

$x \cos(x) = f(x)G(x)$, $F(x) = x^2/2$,

$G(x) = \cos(x)$, $F(x)g(x) = -(x^2/2) \sin(x)$

la situazione non si è semplificata. Scambiamo i ruoli delle due funzione:

$\cos(x)x = f(x)G(x)$, $F(x) = \sin(x)$, $F(x)g(x) = \sin(x)$, da cui

$\int \cos(x)x dx = \sin(x)x - \int \sin(x) dx =$

$(x \sin(x) + \cos(x)) + \mathbb{R}$.

- $\int e^x x dx = \int f(x)G(x)dx =$

$e^x x - \int e^x dx = e^x(x-1) + \mathbb{R}$.

- $\int e^x \cos(x)dx = \int f(x)G(x)dx =$

$e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x)dx$

Apparentemente non abbiamo guadagnato molto, invece trattando l'ultimo integrale in modo analogo si ottiene

$\int e^x \sin(x)dx = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)dx$.

Sostituendo nella relazione precedente si ha infine

$\int e^x \cos(x)dx = (1/2)e^x(\cos(x) + \sin(x)) + \mathbb{R}$

- $\int \cos^2(x)dx = \int f(x)G(x)dx =$

$\sin(x)\cos(x) + \int \sin^2(x)dx =$

$\sin(x)\cos(x) + \int (1 - \cos^2(x))dx =$

da cui, usando anche la linearità,

$\int \cos^2(x)dx = (x + \sin(x)\cos(x))/2 + \mathbb{R}$.

• $h : (-1,1) \to \mathbb{R}$, $h(x) = \sqrt{1-x^2}$.

$\int h(x)dx$? Poniamo $h(x) = f(x)G(x)$, $f(x) = 1$ per ogni x, $G(x) = h(x)$. Da cui $F(x) = x$, $g(x) = -x/G(x)$. Quindi

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx =$$

$$x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}dx + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

da cui

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = (1/2)(x\sqrt{1-x^2} + \text{arcsin}(x)) + \mathbb{R}$$

Integrazione per sostituzione diretta.

Qui riformuliamo la regola di derivazione delle funzioni composte.

Sia $\phi : I \to \mathbb{R}$ derivabile, $J = \phi(I)$, $f : J \to \mathbb{R}$, per cui si può considerare $f \circ \phi : I \to \mathbb{R}$. Sia F una primitiva di f, $G := F \circ \phi$.

Allora $G'(x) = f(\phi(x))\phi'(x)$. Dunque

$\int f(\phi(x))\phi'(x)dx = F \circ \phi + \mathbb{R}$

che possiamo anche riscrivere nella forma

$\int f(\phi(x))\phi'(x)dx = \int f(t)dt$, $t = \phi(x)$

Nella pratica, dovendo studiare

$\int g(x)dx$, $g : I \to \mathbb{R}$,

si cercano f e ϕ tali che $g(x) = f(\phi(x))\phi'(x)$, così che

$\int g(x)dx$ si ottiene da $\int f(t)dt$ mediante la sostituzione diretta $t = \phi(x)$.

Si noti che per fare questo richiediamo soltanto che ϕ sia derivabile e nient'altro.

La cosa è utile se l'integrazione di f risulta più trattabile di quella di g.

- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = \frac{x}{1+x^2}$.

Consideriamo $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ f(t) = 1/t$,

$\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\phi(x) = 1 + x^2,\ f(\phi(x))\phi'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$, quindi

$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} dt =$

$\frac{1}{2} \log(|t|) + \mathbb{R},\ t = 1 + x^2$.

- $g(x) = \frac{|x|}{1+x^2}$

$f(t) = 1/|t|$

$\phi(x) = 1 + x^2$ se $x > 0$,

$\phi(x) = -(1 + x^2)$ se $x < 0$.

Adesso la composizione $f \circ \phi$ si può fare restringendo ϕ a $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty) := I_- \cup I_+$

Attenzione: Questa sostituzione non fornisce le primitive di $g(x)$ su tutto $\mathbb{R}$, ma solo sulle due semirette $I_\pm$ separatamente, della forma

$G_\pm(x) = \pm \log(1 + x^2) + C_\pm$

Per determinare una primitiva G su tutto $\mathbb{R}$ possiamo ragionare come segue. G si restringe a primitive $G_\pm$ di g sulle due semirette rispettivamente. Poiché G è, in particolare, continua anche in 0, questo impone $C_+ = C_- = C$ ed è facile verificare che effettivamente

$$\pm \frac{1}{2} \log(1 + x^2) + C$$

si estende ad una primitiva di g su tutto $\mathbb{R}$.

Sulla notazione $\int f(t)dt$

Abbiamo detto prima che questa notazione per l'integrale indefinito è sostanzialmente arbitraria e senza un significato particolare. Essa si presta però alla seguente manipolazione formale.

Noi usiamo di solito ϕ' per indicare la derivata di una funzione ϕ. Un'altra notazione corrente per la derivata è $\frac{d\phi}{dx}$.

Riscriviamo la formula di integrazione per sostituzione usando questa notazione, ponendo come sopra $t = \phi(x)$

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)dx = \int f(t)\frac{dt}{dx}dx = \int f(t)dt$$

Apparentemente, si ottiene l'ultimo integrale della formula "semplificando"

$$dt = \frac{dt}{dx}dx$$

come fossero numeri. Il punto è che quella semplificazione 'algebrica' **non ha alcun senso compiuto**. Si tratta di una pura manipolazione formale che può essere utile come un espediente mnemonico, ma deve essere usata con cautela in modo non meccanico.

"Leibnitz vs Newton - Analisi non-stardad"

A volte anche la formula dell'integrazione per parti viene riformulata usando lo stesso formalismo

$\int fGdx = FG - \int Fgdx,\ f = \frac{dF}{dx},\ g = \frac{dG}{dx}$

viene riscritta nella forma

$\int dFG = FG - \int FdG$

e dF (G) è chiamato il *fattore differenziale* (*fattore finito*) del prodotto dFG (anlogamente per FdG).

Valgono le stesse considerazioni di uso puramente formale dette prima.

Integrazione per cambiamento di variabile.
Nella stessa situazione vista prima

$\phi : I \to J$, $f : J \to \mathbb{R}$

si supponga **di più** che

ϕ *sia invertibile con inversa derivabile*

$\psi = \phi^{-1} : J \to I$.

Diciamo allora che $x = \psi(t)$, $t = \phi(x)$ è un *cambiamento di variabile*.

La formula dell'integrazione per sostituzione può essere riscritta nella forma

$\int f(t)dt = \int f(\phi(x))\phi'(x)dx$, $x = \psi(t)$, $t = \phi(x)$.

Nella pratica, dovendo studiare

$\int f(t)dt$

si cerca un cambiamento di variabile tale che

$\int f(\phi(x))\phi'(x)dx$

sia più trattabile.

Esempi.

- $J = \{|t| < 1\}$, $f : J \to \mathbb{R}$, $f(t) = \sqrt{1 - t^2}$.

Facciamo il cambiamento di variabile $x = \text{arcsin}(t)$ a valori in $I = \{|x| < \pi/2\}$, $t = \sin(x)$. Allora

$$\int \sqrt{1 - t^2} dt = \int \cos^2(x) dx = \frac{x + \sin(x)\cos(x)}{2} + \mathbb{R},$$

$x = \text{arcsin}(t)$, $t = \sin(x)$.

• Il seguente esempio mostra che *bisogna tenere sotto controllo il dominio dove un certo cambiamento di variabile si applica effettivamente, evitando di operare in modo meccanico.*

Supponiamo di volere usare il teorema fondamentale per calcolare l'integrale **definito**

$$\int_0^\pi f(t)dt := \int_0^\pi \frac{1}{1+\sin^2(t)}dt = F(\pi) - F(0)$$

dove F è una qualsiasi primitiva della funzione f che è elementare derivabile e definita su tutto $\mathbb{R}$. Studiamo l'integrale **indefinito** di f facendo un opportuno cambio di variabile.

Facciamo il cambiamento di variabile

$x = \tan(t)$, $t = \arctan(x)$.

Allora, usando il formalismo discusso prima, abbiamo

$f(t) = \frac{1+x^2}{1+2x^2}$

$dt = \frac{1}{1+x^2}dx$

Per cui

$\int f(t)dt = \int \frac{1}{1+2x^2}dx = (1/\sqrt{2})\arctan(\sqrt{2}x) + \mathbb{R}$

ed infine

$\int \frac{1}{1+\sin^2(t)}dt =$

$\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan(t)) + \mathbb{R} := F(t) + \mathbb{R}.$

Tornando all'integrale **definito** e usando la primitiva F di f così ottenuta, otteniamo

$$\int_0^\pi f(t)dt := \int_0^\pi \frac{1}{1+\sin^2(t)}dt =$$

$$F(\pi) - F(0) = 0 + 0 = 0$$

Ma questo risultato è sicuramente **sbagliato** perché $f(x) > 0$ su tutto $\mathbb{R}$. **Dove è l'errore?**

L'errore consiste nel fatto che

il cambiamento di variabile usato $x = \tan(t)$ *ha senso solo su intervalli della forma*

$(-\pi/2, \pi/2) + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

e nessuno di questi contiene l'intervallo $[0, \pi]$.

Quindi la primitiva di f trovata non è definita su tutto $[0, \pi]$ e non possiamo usarla per applicare il teorema fondamentale.

Per trovare una primitiva definita su $[0, \pi]$, osserviamo che

$$([0, \pi] \setminus \{\pi/2\}) \subset (-\pi/2, \pi/2) \cup (\pi/2, 3\pi/2).$$

Sul primo intervallo consideriamo la primitiva $F(t)$, sul secondo la primitiva $F(t) + \pi\sqrt{2}$. Si verifica che questa si estende per continuità in $\pi/2$ fornendo una primitiva $G(t)$ su tutto $[0, \pi]$. Usando questa otteniamo il risultato **corretto**:

$$\int_0^\pi f(t)dt = G(\pi) - G(0) = \pi\sqrt{2}.$$

Regole di integrazione definita.

Supponiamo di essere in una situazione in cui si possa applicare il teorema fondamentale. Per esempio, questo è vero se le funzioni coinvolte sono continue. Allora abbiamo le seguenti versioni "definite" delle regole viste prima per l' integrale indefinito.

Integrazione per parti.

$\int_a^b f(x)G(x)dx = [F(x)G(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g(x)dx$

Sostituzione diretta.

$\int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)dx = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)dt$

Cambiamento di variabile.

$\int_a^b f(t)dt = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(x))\phi'(x)dx.$

Alcune famiglie di primitive elementari.

• Per ogni coppia $(k, m) \in \mathbb{N}^2$, $k \geq 1$, poniamo

$I_{k,m} = \int x^m e^{kx} dx$.

Calcoliamo per induzione su $m \geq 0$.

$I_{k,0} = \frac{1}{k} e^{kx} + \mathbb{R}$.

$(x^{m+1} e^{kx})' = (m+1) x^m e^{kx} + k x^{m+1} e^{kx}$

integrando per parti:

$I_{k,m+1} = (1/k)(x^{m+1} e^{kx} - (m+1) I_{k,m})$.

Usando la linearità dell'integrale, il risultato si estende ad ogni integrale della forma

$\int p(x, e^{kx}) dx$

dove $p(X_1, X_2) \in \mathbb{R}[X_1, X_2]$ è un polinomio in due variabili.

- $I_{m,n} := \int x^m (\log(x))^n dx =$

$\frac{x^{m+1}}{m+1}(\log(x))^n - \int \frac{x^{m+1}}{m+1} n \frac{(\log(x))^{n-1}}{x} dx =$

$\frac{x^{m+1}}{m+1}(\log(x))^n - \frac{n}{m+1} I_{m,n-1}$

Iterando n volte ci riduciamo all'integrale $\int x^m dx$ che è immediato.

Usando la linearità dell'integrale, il risultato si estende ad ogni integrale della forma

$\int p(x, \log(x)) dx$

dove $p(X_1, X_2) \in \mathbb{R}[X_1, X_2]$ è un polinomio in due variabili.

• Per ogni $m \in \mathbb{N}$, consideriamo gli integrali indefiniti

$$I_m = \int x^m \sin(x)dx, \; J_m = \int x^m \cos(x)dx$$

che trattiamo contemporaneamente per induzione su $m \geq 0$. Per $m = 0$, l'integrazione è immediata in entrambi i casi.

$$(x^{m+1}\sin(x))' = (m+1)x^m \sin(x) + x^{m+1}\cos(x)$$

$$(x^{m+1}\cos(x))' = (m+1)x^m \cos(x) - x^{m+1}\sin(x)$$

integrando per parti e usando la linearità, si ottiene

$$J_{m+1} = x^{m+1}\sin(x) - (m+1)I_m$$

$$I_{m+1} = x^{m+1}\cos(x) + (m+1)J_m \; .$$

Usando la linearità dell'integrale, il calcolo si estende ad ogni integrale indefinito della forma

$\int p(x) \sin(x) dx, \int p(x) \cos(x) dx$

dove $p(x)$ è polinomiale.

- $f(x) := e^x \cos(x)$, $g(x) := e^x \sin(x)$

Applicando successivamente due volte la integrazione per parti,

$\int f(x)dx = f(x) + \int g(x)dx =$

$f(x) + g(x) - \int f(x)dx$

da cui

$\int f(x)dx = \frac{1}{2}(f(x) + g(x)) + \mathbb{R}$

In modo analogo si trattano tutti gli integrali della forma $\int e^{ax} \cos(bx)dx$, $\int e^{ax} \sin(bx)dx$.

• Per $s \in \mathbb{N}$, $s \geq 1$, $I_s = \int \frac{1}{(1+t^2)^s} dt$

Affermiamo che questi integrali si ottengono induttivamente su $s \geq 1$ nel modo seguente:

$I_1 = \text{arctan}(t) + \mathbb{R}$

Per $s > 1$,

$I_s = \frac{t}{2(s-1)(1+t^2)^{s-1}} + \frac{2s-3}{2s-2} I_{s-1}$

Diamo un'indicazione di come si ottiene questa relazione induttiva. Si parte dall'identità di verifica immediata

$\frac{1}{(1+t^2)^s} = \frac{1}{(1+t^2)^{s-1}} - \frac{t^2}{(1+t^2)^s}$

da cui

$I_s = I_{s-1} - \int \frac{t^2}{(1+t^2)^s} dt$

Integriamo per parti l'ultimo integrale ponendo

$$\frac{t^2}{(1+t^2)^s} = \int f(t)G(t)dt = \int \frac{2t}{(1+t^2)^s}\frac{t}{2}dt$$

$$F(t) = \frac{1}{(1-s)(1+t^2)^{s-1}}$$

da cui

$$I_s = I_{s-1} + \frac{1}{(1-s)(1+t^2)^{s-1}}\frac{t}{2} - \frac{1}{2(1-s)}I_{s-1}$$

A questo punto, semplici calcoli algebrici ci danno la formula induttiva data all'inizio.

• **Polinomi trigonometrici.**

Sia $p(X_1, X_2) \in \mathbb{R}[X_1, X_2]$ un polinomio in due variabili. Vogliamo trattare gli integrali indefiniti della forma

$\int p(\cos(ax+b), \sin(cx+d))dx$

al variare dei parametri $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a, c \neq 0$.

Usando la linearità dell'integrale, ci riduciamo a studiare il caso in cui $p(X_1, X_2)$ è un monomio, cioè a integrali della forma

$\int k \cos^s(ax+b) \sin^r(cx+d)dx.$

$k \cos^s(ax+b) \sin^r(cx+d)$

può essere espresso come somma di termini della forma

$K \cos(Ax+B),\ K \sin(Cx+D)$.

Questo fatto lo otteniamo per induzione su $m = s + r \geq 1$.

Se $m = 1$ la cosa è evidente.

Se $s + r > 1$ e $s \geq r$, scriviamo

$\cos^s(ax+b) \sin^r(cx+d) =$

$\cos(ax+b)(\cos^{s-1}(ax+b) \sin^r(cx+d))$

Se $s \leq r$

$$\cos^s(ax+b)\sin^r(cx+d) =$$

$$\sin(cx+d)(\cos^s(ax+b)\sin^{r-1}(cx+d)).$$

In ogni caso, applichiamo al secondo fattore l'ipotesi induttiva, ottenendo una somma di fattori dei seguenti tipi.

$$K\cos(ax+b)\cos(Ax+B),$$

$$K\cos(ax+b)\sin(CX+D),$$

$$K\sin(cx+d)\cos(ax+b),$$

$$K\sin(cx+d)\sin(Cx+D).$$

Siamo quindi ridotti a trattare il caso $m = 2$ Questo è una conseguenza diretta delle formule dette di *Prostaferesi*, che si ottengono usando quelle di addizione per il seno e il coseno:

$$\sin(A)\sin(B) = \frac{\cos(A-B)-\cos(A+B)}{2}$$

$$\sin(A)\cos(B) = \frac{\sin(A-B)+\sin(A+B)}{2}$$

$$\cos(A)\cos(B) = \frac{\cos(A-B)+\cos(A+B)}{2}.$$

Ancora per la linearità dell'integrale siamo ridotti a studiare integrali della forma

$\int \cos(ax + b)dx$, $\int \sin(ax + b)dx$.

Il cambio di variabile $t = ax + b$, $x = \frac{t-b}{a}$ ci riduce infine a calcolare

$(1/a) \int \cos(t)dt$, $(1/a) \int \sin(t)dt$

e questo è immediato.

Un altro modo di trattare

$\int \sin^r(x)\cos^s(x)dx$

mediante opportune sostituzioni che riducono al calcolo di integrali di polinomi.

(1) $r = 2m + 1$, $s = 2n$.

$\int \sin^r(x)\cos^s(x)dx =$

$\int (1 - \cos^2(t))^m \cos^{2n} \sin(x)dx =$

$-\int (1 - t^2)^m t^{2n} dt$, $t = \cos(x)$.

Analogamente se r è pari e s dispari.

(2) $r = 2m+1$, $s = 2n+1$ (entrambi dispari).

$\int \sin^r(x)\cos^s(x)dx =$

$\int \sin^{2m}(x)\cos^{2n}(x)\sin(x)\cos(x)dx =$

$-\frac{1}{4}\int(\frac{1-t}{2})^m(\frac{1+t}{2})^n dt,\ t = \cos(2x).$

Qui indichiamo un trattamento (equivalente) dei polinomi trigonometrici basato sull'uso dei **numeri complessi**. Questi sono stati trattati nel corso di geometria.

Se $z = x + iy \in \mathbb{C}$,

$e^z := e^x e^{iy} := e^x(\cos(y) + i \sin(y))$.

Segue dalla proprietà funzionale fondamentale dell'esponenziale reale e dalle formule di addizione del seno e del coseno che

$e^{z+w} = e^z e^w$.

$\cos(y) = \frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2}$, $\sin(y) = \frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}$

Praticamente tutte le formule della trigonometria elementare sono ricavabili per via algebrica a partire da queste relazioni fondamentali.

Per esempio

$$\sin(A)\sin(B) = \frac{e^{iA}-e^{-iA}}{2i}\frac{e^{iB}-e^{-iB}}{2i} =$$

$$(1/2)(\frac{e^{i(A-B)}+e^{-i(A-B)}}{2} - \frac{e^{i(A+B)}+e^{-i(A+B)}}{2}) =$$

$$\frac{\cos(A-B)-\cos(A+B)}{2}$$

Allora per trattare i monomi trigonometrici, per esempio

$$\cos^s(ax+b)\sin^r(cx+d) =$$

$$(\frac{e^{i(ax+b)}+e^{-i(ax+b)}}{2})^s(\frac{e^{i(cx+d)}-e^{-i(cx+d)}}{2i})^r$$

si sviluppi e semplifichi totalmente il secondo termine usando lo sviluppo del binomio di Newton e le relazioni fondamentali di cui sopra.

Integrazione delle funzioni razionali

Una funzione razionale è della forma

$f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$

dove $N(x)$ e $D(x)$ sono polinomiali, $D(X)$ non è il polinomio nullo e f è definita su

$A := \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R}; D(x) = 0\}$.

Consideriamo la restrizione $f : I \to \mathbb{R}$ ad uno qualsiasi degli intervalli aperti I, due a due disgiunti, che formano A.

Vogliamo determinare esplicitamente $\int f(x)dx$.

Premettiamo alcuni fatti (più o meno noti) a proposito dei polinomi, in particolare a coefficienti reali e complessi.

• Se K è un campo qualsiasi (in particolare $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$) possiamo fare la **divisione con il resto** tra polinomi:

Se $a(X), d(X) \in K(X)$ *sono polinomi e* $d(X) \neq 0$, *allora esistono unici polinomi* $q(X)$ *e* $r(X)$ *tali che*

$a(X) = q(X)d(X) + r(X)$,

grado $r(X) <$ *grado* $d(X)$.

Come corollario abbiamo che $\alpha \in K$ è una **radice** di $a(X)$ (cioè $a(\alpha) = 0$) se e solo se per qualche $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$

$a(X) = (X - \alpha)^m Q(X)$, $Q(\alpha) \neq 0$

m è detta la *molteplicità* della radice α.

• $\mathbb{C}$ è **algebricamente chiuso**, cioè

Ogni polinomio $a(X) \in \mathbb{C}[X]$ *di grado* $n \geq 1$ *ammette una radice* $\alpha \in \mathbb{C}$.

Come corollario abbiamo che $a(X)$ ammette una fattorizzazione (essenzialmente unica) della forma

$a(X) = a_n \prod_{j=1}^{k} (X - \alpha_j)^{m_j}$

$\alpha_i \neq \alpha_j$ se $i \neq j$.

Il polinomio si dice *monico* se $a_n = 1$.

Un polinomio reale $a(X) \in \mathbb{R}[X]$ può non avere radici reali. Ad esempio $a(X) = X^2 + 1$.

Poiché $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ è un sotto-campo, possiamo considerare le radici *complesse* di un polinomio reale che esistono sempre.

Ricordiamo che se $z = x + iy \in \mathbb{C}$, allora

$\bar{z} := x - iy$

è il *coniugato* di z. Si verifica algebricamente che

$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$, $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$

$z \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ se e solo se $z = \bar{z}$.

Siano $a(X) \in \mathbb{R}[X]$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $a(\alpha) = 0$, $\alpha \neq \bar{\alpha}$. *Cioè* α *è una radice complessa e non reale di* $a(X)$. *Allora anche* $\bar{\alpha}$ *è una radice di* $a(X)$ *e le due radici hanno la stessa molteplicità, diciamo* r.

Dim. $0 = \bar{0} = \overline{a(\alpha)} = \overline{a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_n\alpha^n} =$

$\bar{a}_0 + \bar{a}_1\bar{\alpha} + \cdots + \bar{a}_n\overline{(\alpha^n)} =$

$a_0 + a_1\bar{\alpha} + \cdots + a_n\bar{\alpha}^n = a(\bar{\alpha})$

Se $\alpha = a + ib$, $b \neq 0$, allora

$$q_\alpha(X) := (X-\alpha)(X-\bar{\alpha}) = X^2 - 2aX + (a^2+b^2)$$

è un polinomio **reale** di secondo grado senza radici reali ($\Delta = 4a^2 - 4(a^2+b^2) = -4b^2 < 0$).

Combinando i fatti precedenti, abbiamo

Ogni polinomio reale monico $a(X)$ *di grado* $n \geq 1$ *ammette una fattorizzazione, sostanzialmente unica, della forma*

$a(X) = (\prod_{j=1}^{k}(X - \lambda_j)^{m_j})(\prod_{i=1}^{h} q_{\alpha_i}(X)^{r_i})$

$\lambda_j \in \mathbb{R}$, $\lambda_j \neq \lambda_s$ *se* $j \neq s$

$\alpha_i \neq \bar{\alpha}_i$, $\alpha_i \neq \alpha_s$, *se* $i \neq s$.

$\sum_j m_j + \sum_i 2r_i = n$.

Attenzione: Il teorema di *fattorizzazione* dei polinomi (reali o complessi) afferma che tale fattorizzazione **esiste**, ma **non** dice che essa può essere sempre ottenuta **in modo esplicito**. In generale le radici di un polinomio complesso possono essere solo approssimate ma non determinate esattamente.

Torniamo all'integrazione delle funzioni razionali.

Dato $\frac{N(X)}{D(X)}$, facciamo la *divisione con il resto*

$$N(X) = a(X)D(X) + R(X)$$

dove il grado del resto $R(X)$ è strettamente minore del grado di $D(X)$.

Quindi

$$f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = a(x) + \frac{R(X)}{D(X)}$$

Per la linearità dell'integrale

$$\int f(x)dx = \int a(x)dx + \int \frac{R(x)}{D(x)}dx.$$

Essendo l'integrazione del polinomio $a(x)$ immediata,

non è restrittivo supporre che il grado del numeratore $N(X)$ sia strettamente minore di quello del denominatore $D(X)$.

Inoltre, a meno di una costante moltiplicativa possiamo anche assumere che $D(X)$ sia monico.

Integrazione quando il grado di $D(X)$ è minore o uguale a 2.

Se il grado di $D(X)$ è uguale a 1, allora

$f(x) = \frac{a}{x-\lambda}$,

$\int f(x)dx = a \log(|x-\lambda|) + \mathbb{R}$.

Se il grado di $D(X)$ è uguale a due ci sono varie possibilità a seconda del segno del Δ di $D(X)$.

$\Delta > 0$, allora $D(X)$ ha due radici reali distinte λ, μ, per cui

$f(x) = \frac{ax+b}{(x-\lambda)(x-\mu)}$

$\Delta = 0$, allora $D(X)$ ha una radice reale doppia λ,

$f(x) = \frac{ax+b}{(x-\lambda)^2}$

$\Delta < 0$, allora

$f(x) = \frac{ax+b}{x^2+px+q}$, $\Delta = p^2 - 4q < 0$

quindi il denominatore è uguale a $q_\alpha(X)$, con $\alpha = -p/2 + i\sqrt{-\Delta}/2$.

Integriamo caso per caso.

Esistono (uniche) costanti A e B tali che

$\frac{ax+b}{(x-\lambda)(x-\mu)} = \frac{A}{x-\lambda} + \frac{B}{x-\mu}$

Quindi

$\int f(x)dx = A \log(|x-\lambda|) + B \log(|x-\mu|) + \mathbb{R}$

A e B si possono esplicitare risolvendo il sistema lineare 2×2 ottenuto uguagliando i numeratori nell'equazione

$\frac{ax+b}{(x-\lambda)(x-\mu)} = \frac{A(x-\mu)+B(x-\lambda)}{(x-\lambda)(x-\mu)}$

da cui si ricava

$A + B = a$, $\mu A + \lambda B = -b$

infine

$A = \frac{a\lambda+b}{\lambda-\mu}$, $B = \frac{a\mu+b}{\mu-\lambda}$

Esistono (uniche) costanti A, B tali che

$$\frac{ax+b}{(x-\lambda)^2} = \frac{A}{x-\lambda} + \frac{B}{(x-\lambda)^2} = \frac{Ax+B-A\lambda}{(x-\lambda)^2}$$

Quindi

$$\int f(x)dx = A\log(|x-\lambda|) - \frac{B}{x-\lambda} + \mathbb{R}$$

A e B si ricavano esplicitamente risolvendo il sistema lineare 2×2 ottenuto imponendo l'uguaglianza dei numeratori qui sopra e in definitiva si trova

$$A = a,\ B = a\lambda + b.$$

Nel terzo caso, partiamo dall'identità di verifica immediata

$$\frac{ax+b}{x^2+px+q} = \frac{a}{2}\frac{2x+p}{x^2+px+q} + \frac{2b-ap}{2}\frac{1}{x^2+px+q}$$

Quindi

$$\int f(x)dx = \frac{a}{2}\log(x^2+px+q) + \frac{2b-ap}{2}\int \frac{dx}{x^2+px+q}$$

resta da calcolare l'ultimo integrale.

$x^2 + px + q = (x + \frac{p}{2})^2 + (q - \frac{p^2}{4}) =$

$(\frac{2x+p}{2})^2 + (\frac{\sqrt{-\Delta}}{2})^2$

Quindi

$\int \frac{1}{x^2+px+q} dx =$

$\int \frac{1}{(\frac{2x+p}{2})^2+(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2})^2} dx =$

$\frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \text{arctan}(\frac{2x+p}{\sqrt{-\Delta}}) + \mathbb{R}$

Il caso generale.

$f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$, con grado di $N(x)$ strettamente minore di quello di $D(x)$ che è monico. Consideriamo la fattorizzazione del denominatore

$$D(x) = (\prod_{j=1}^{k}(x-\lambda_j)^{m_j})(\prod_{i=1}^{h}(x^2+p_ix+q_i)^{r_i})$$

Affermiamo che $f(x)$ si può scrivere (in modo unico) nella forma

$$f(x) = \sum_{j=1}^{k} L_j + \sum_{i=1}^{h} S_i$$

dove

$$L_j = \sum_{l=1}^{m_j} \frac{A_{j,l}}{(x-\lambda_j)^l} = \frac{A_{j,1}}{x-\lambda_j}+\frac{A_{j,2}}{(x-\lambda_j)^2}+\cdots+\frac{A_{j,m_j}}{(x-\lambda_j)^{m_j}}$$

$$S_i = \sum_{t=1}^{r_i} \frac{B_{i,t}x+C_{i,t}}{(x^2+p_ix+q_i)^t} = \frac{B_{i,1}x+C_{i,1}}{x^2+p_ix+q_i}+\cdots+\frac{B_{i,r_i}x+C_{i,r_i}}{(x^2+p_ix+q_i)^{r_i}}$$

dove le $A_{j,l}$, $B_{i,t}$ e $C_{i,t}$ sono opportune costanti (univocamente determinate).

Ammesso questo fatto, l'integrazione di $f(x)$ si riduce a integrali dei seguenti tipi:

$\int \frac{dx}{(x-\lambda)^l}$, $\int \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^s}dx$

I primi sono immediati. I secondi, con manipolazioni simili a quelle fatte quando $D(X)$ è di grado 2, si riducono a loro volta ad integrali della forma

$\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^s}dx$, $\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^s}$.

I primi sono immediati mediante la sostituzione diretta $f(t) = \frac{1}{t^s}$, $t = x^2 + px + q$.

I secondi, mediante la sostituzione

$\frac{2x+p}{\sqrt{-\Delta}} = t$

si riducono a integrali del tipo

$I_s = \int \frac{dt}{(1+t^2)^s}$

che abbiamo già trattato prima, ricavandone una definizione per induzione su $s \geq 1$.

Esempi.

- $I := \int \frac{x^5+2x^4}{x^3+1}dx$

$x^5 + 2x^4 = (x^2 + 2x)(x^3 + 1) - (x^2 + 2x)$

$I = x^3/3 + x^2 - \int \frac{x^2+2x}{x^3+1}dx$

$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$, $\Delta = -3$.

Esprimiamo l'integranda nella forma

$\frac{x^2+2x}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$

Per determinare le costanti A, B, C, imponiamo

$x^2 + 2x = A(x^2 - x + 1) + (Bx + C)(x + 1)$

$A + B = 1,\ -A + B + C = 2,\ A + C = 0$

$A = -\frac{1}{3},\ B = \frac{4}{3},\ C = \frac{1}{3}.$

Siamo ridotti a calcolare integrali con il denominatore di grado ≤ 2. Svolgendo i conti, si ottiene alla fine

$I = x^3/3 + x^2 + (1/3)\log(|x+1|) -$

$(2/3)\log(x^2 - x + 1) - (2/\sqrt{3})\text{arctan}(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}) + \mathbb{R}$

- $I = \int \frac{1}{(x^2-1)^2} dx$

$(x^2 - 1)^2 = (x+1)^2(x-1)^2$

$\frac{1}{(x^2-1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2}$

Per determinare le costanti, possiamo risolvere il sistema lineare 4×4 ottenuto riducendo l'equazione precedente allo stesso denominatore e imponendo l'uguaglianza dei numeratori. Svolgendo i conti si ottiene

$A = 1/4, B = 1/4, C = -1/4, D = 1/4$

$I = (1/4)\log(|\frac{x+1}{x-1}|) - (1/2)\frac{x}{x^2-1} + \mathbb{R}.$

Determinazione delle costanti A, B, C.

Tutto il procedimento è esplicito, **ammettendo di conoscere la fattorizzazione di** $D(x)$. Come già detto, in generale questa esiste teoricamente ma non è esplicitabile in modo effettivo.

Ammettendo la fattorizzazione di $D(X)$, le costanti che intervengono nei termini L_j e S_i possono essere calcolate esplicitamente come soluzione del sistema lineare che si ottiene riducendo l'equazione

$\frac{N(x)}{D(x)} = \sum_{j=1}^{k} L_j + \sum_{i=1}^{h} S_i$

allo stesso denominatore e imponendo l'uguaglianza dei numeratori. Si potrebbe dimostrare direttamente (non lo facciamo) che tale soluzione esiste (ed è unica).

Indichiamo un altro metodo, ricorsivo, per determinare quelle costanti. Cominciamo con i termini di tipo L_j relativi alle (eventuali) radici **reali** $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ di $D(X)$ e determiniamo le costanti $A_{j,l}$.

Sia $(x - \lambda)^m := (x - \lambda_1)^{m_1}$.

$D(x) = (x - \lambda)^m D_1(x)$. Per ogni $A \in \mathbb{R}$, possiamo scrivere

$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{A}{(x-\lambda)^m} + \frac{N(x)-AD_1(x)}{(x-\lambda)^m D_1(x)}$

Determiniamo $A = A_m$ imponendo che λ sia una radice del numeratore dell'ultima frazione. È immediato verificare che

$A_m := \frac{N(\lambda)}{D_1(\lambda)}$.

Con quella scelta di A_m, possiamo semplificare un fattore $x - \lambda$ e ottenere

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{A_m}{(x-\lambda)^m} + \frac{N_1(x)}{(x-\lambda)^{m-1} D_1(x)}$$

l'ultima frazione ha un denominatore per cui la molteplicità del fattore $x - \lambda$ è calata di 1.

Iterando $m = m_1$ volte, risostituendo $\lambda = \lambda_1$, si ottiene

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{A_{1,m_1}}{(x-\lambda_1)^{m_1}} + \cdots + \frac{A_{1,1}}{x-\lambda_1} + \frac{\widehat{N}(x)}{\widehat{D}(x)}$$

dove il polinomio $\widehat{D}(x) = \frac{D(x)}{(x-\lambda_1)^{m_1}}$ non contiene più il fattore $(x-\lambda_1)^{m_1}$.

Iteriamo la costruzione su $\frac{\widehat{N}(x)}{\widehat{D}(x)}$ rispetto al fattore $(x-\lambda)^m := (x-\lambda_2)^{m_2}$

Iteriamo la costruzione k volte su fino ad esaurire tutti i fattori di tipo $(x-\lambda_j)^{m_j}$ di $D(x)$.

Siamo così ridotti a studiare $\frac{N(x)}{D(x)}$ dove la fattorizzazione di $D(x)$ contiene solo fattori del tipo

$$(x^2 + px + q)^r = (x - \alpha)^r (x - \bar{\alpha})^r = q_\alpha(x)^r$$

Per ogni tale fattore, per ogni coppia di costanti $B, C \in \mathbb{R}$, abbiamo l'identità algebrica

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{Bx+C}{q_\alpha(x)^r} + \frac{N(x)-(Bx+C)D_1(x)}{q_\alpha(x)^r D_1(x)}$$

Scegliamo allora $(B, C) := (B_r, C_r)$ imponendo che α sia una radice del numeratore dell'ultima frazione. Poiché esso è un polinomio reale, anche $\bar{\alpha}$ sarà automaticamente una radice.

Se $\alpha = a + ib$, $b \neq 0$

$u + iw := \frac{N(\alpha)}{D_1(\alpha)}$

semplici calcoli mostrano che

$B_r = w/b$, $C_r = u - (a/b)w$

sono le costanti volute. Ma allora

$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{B_r x + C_r}{q_\alpha(x)^r} + \frac{N_1(x)}{q_\alpha(x)^{r-1} D_1(x)}$

e possiamo concludere iterando la costruzione come per le radici reali.

In questo modo abbiamo completato l'integrazione 'esplicita' (ammettendo la fattorizzazione di $D(x)$) delle funzioni razionali.

• Un corollario **qualitativo** è che

Le primitive delle funzioni razionali sono elementari e sono esprimibili mediante combinazioni lineari di funzioni razionali, funzioni del tipo $\log(|ax^2 + bx + c|)$ *o* $\arctan(ax + b)$.

Esempio. Applichiamo il metodo ricorsivo per determinare le costanti all'ultimo esempio visto sopra:

$$\int \frac{1}{(x^2-1)^2}dx = \int \frac{1}{(x-1)^2(x+1)^2}dx$$

$\lambda = -1$, B$=$ A_2

$$A_2 = \frac{N(-1)}{D_1(-1)} = \frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{(x+1)^2(x-1)^2} = (1/4)\frac{1}{(x+1)^2} - (1/4)\frac{x-3}{(x+1)(x-1)^2}$$

$$A = A_1 = -\frac{1}{4}\frac{-1-3}{(-2)^2} = \frac{1}{4},\ \ldots$$

Razionalizzazione di integrali di funzioni non razionali

Per alcune famiglie di funzioni elementari **non-razionali** opportune sostituzioni o cambiamenti di variabile riconducono lo studio degli integrali indefiniti a quello di funzioni razionali. Diciamo che questi integrali possono essere *razionalizzati*.

Negli esempi che seguono opereremo in modo un po' formale. È sottinteso che caso per caso si debba precisare dove il cambiamento di variabile è valido.

• Sia $R(y)$ una funzione razionale della variabile y. Sia $y = y(x)$, $x = z(y)$ un cambio di variabile tale che $z'(y) = S(y)$ sia anch'essa una funzione razionale.

Allora,

$\int R(y(x))dx = \int R(y)S(y)dy$,

$y = y(x)$, $x = z(y)$

e la seconda funzione da integrare è razionale

Esempi.

$\int R(e^x)dx = \int \frac{R(e^x)}{e^x}e^x dx = \int \frac{R(y)}{y}dy$

$y = e^x$, $x = \log(y)$ $dy = e^x dx$. $R(y)/y$ è razionale.

Un esempio particolare:

$\int \frac{e^x}{1+e^x}dx = \int \frac{y^2}{1+y}dy$, $y = e^x$, $x = \log(y)$

$y^2 = (y-1)(y+1) + 1$

$\int \frac{y^2}{1+y}dy = \int (y-1)dy + \int \frac{1}{1+y}dy$

$\int \frac{y^2}{1+y}dy = (y^2/2 - y) + \log(|1+y|) + \mathbb{R}$, $y = e^x$.

$\int R(\tan(x))dx = \int \frac{R(y)}{1+y^2}dy,$

$x = \arctan(y),\ y = \tan(x),$

$\frac{R(y)}{1+y^2}$ è razionale.

$\int R(\tanh(x))dx = \int \frac{R(y)}{1-y^2}dy$,

$y = \tanh(x)$, $x = \operatorname{arctanh}(y)$.

$R(x, y)$ razionale di due variabili.

$I := \int R(x, \sqrt[n]{ax + b})dx$, $a \neq 0$.

$y = \sqrt[n]{ax + b}$, $x = \frac{y^n - b}{a}$, $dx = ny^{n-1}dy$

$I = \int R(\frac{y^n - b}{a}, y)ny^{n-1}dy$, $y = \sqrt[n]{ax + b}$

e l'ultima funzione da integrare è razionale nella variabile y.

Un esempio.

$I \; := \; \int \frac{5+\sqrt{x}}{x+2} dx \; = \; \int \frac{5+y}{y^2+2} 2y dy \; = \; 2 \int \frac{y^2+5y}{y^2+2} dy,$
$y = \sqrt{x}.$

$$y^2 + 5y = (y^2 + 2) + (5y - 2)$$

$$I = 2(y + \int \frac{5y-2}{y^2+2} dy) = \cdots =$$

$$2\sqrt{x} + 5\log(x+2) - 2\sqrt{2}\arctan(\sqrt{x/2}) + \mathbb{R}$$

Sia $R(x, y_1, \ldots, y_k)$ una funzione razionale di $k+1$ variabili.

$I := \int R(x, x^{1/n_1}, \ldots, x^{1/n_k})dx$

$n = \text{m.c.m}(n_1, \ldots, n_k)$,

$y = \sqrt[n]{x}$, $x = y^n$, $dx = ny^{n-1}dy$.

$I = \int R(x, y^{n/n_1}, \ldots, y^{n/n_k})ny^{n-1}dy$

Un esempio.

$\int \frac{5+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+2}dx = 6\int \frac{5+y^3}{y^2+2}y^5 dy = 6\int \frac{5y^5+y^8}{y^2+2}dy,$

$y = \sqrt[6]{x}.$

$y^8 + 5y^5 =$

$(y^6 - 1y^4 + 5y^3 + 4y^2 - 10y - 8)(y^2 + 2)+$

$(10y - 16)$

etc...

Integrali Abeliani.

$\int R(x, y(x))dx$

dove $R(x, y)$ è razionale, esiste un polinomio in due variabili $p(X, Y)$ tale che $p(x, y(x)) = 0$, x varia in un intervallo aperto I.

Il luogo di zeri

$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; p(x, y) = 0\}$

è una *curva* in $\mathbb{R}^2$ e

$x \to (x, y(x))$

è una parametrizzazione di un arco di Γ.

Un tale integrale si razionalizza se la curva Γ è razionale, cioè se esistono due funzioni **razionali** di una terza variabile t

$x = \phi(t),\ y = \psi(t)$,

tali che

$t = \phi^{-1}(x)$

è un cambio di variabile e

$p(\phi(t), \psi(t)) = 0$ per ogni t.

In tal caso

$\int R(x, y(x))dx = \int R(\phi(t), \psi(t))\phi'(t)dt$.

Esempi di integrali abeliani.

• Supponiamo che $p(x,y)$ abbia grado uguale a 2. In tal caso diciamo che Γ è una **conica**. Supponiamo che sia *non-degenere* cioè sia una *ellisse*, una *iperbole* o una *parabola*. Un metodo geometrico per determinare le funzioni $\phi(t)$, $\psi(t)$ è il seguente. Sia $(x_0, y_0) \in \Gamma$. La generica retta passante per (x_0, y_0) ha equazione

$$y = tx + (y_0 - tx_0)$$

al variare del parametro t. Tale retta interseca Γ in un solo altro punto $(\phi(t), \psi(t))$ di coordinate che sono funzioni razionali di t.

Mostriamo per esempio che la circonferenza unitaria

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$$

è razionale. Consideriamo $(x_0, y_0) = (0, 1)$. Al variare di $t \in \mathbb{R}$, la retta passante r per i punti $(0, 1)$ e $(t, 0)$ ha espressione parametrica

$$r = \{s(t, -1) + (0, 1) \in \mathbb{R}^2; s \in \mathbb{R}\}$$

I punti di $r \cap \Gamma$ verificano l'equazione

$$s^2 t^2 + (1 - s)^2 = 1$$

$$s(s(t^2 + 1) - 2) = 0$$

da cui si ottiene $s = 0$ che corrisponde al punto $(0, 1)$ e $s = \frac{2}{1+t^2}$ che corrisponde all'altro punto di intersezione. Ne segue che

$$t \to (\tfrac{2t}{1+t^2}, \tfrac{t^2-1}{t^2+1})$$

è una parametrizzazione razionale di $\Gamma \setminus \{(0, 1)\}$

Un esempio.

$\int R(x, \sqrt{(x-1)(x-2)})dx$

$p(x,y) = y^2 - (x-1)(x-2)$, $(x_0, y_0) = (1,0)$; le rette hanno equazioni $y = tx - t$. Sostituendo in $p(x,y) = 0$ otteniamo

$(x-1)(t^2(x-1) - (x-2)) = 0$

$x = \frac{t^2-2}{t^2-1}$, $y = \frac{-t}{t^2-1}$

Se, per esempio, consideriamo $R(x, y(x))$ definita su $I = \{x > 2\}$, allora ϕ è un cambiamento di variabile a valori in $J = \{0 < t < 1\}$ e su questo dominio vale la razionalizzazione dell'integrale.

$R(x,y)$ razionale

$\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx,\ ad-bc \neq 0.$

$p(x,y) = (cx+d)y^n - (ax+b)$

Allora

$x = \frac{dt^n - b}{-ct^n + a},\ y = t$

ristrette ad ogni sottointervallo aperto di

$\{-ct^n + a \neq 0\}$

sono funzioni razionalizzanti.

$\int \sqrt{\frac{x+3}{x+2}} dx$

$p(x, y) = y^2(x+2) - (x+3)$, $x = \frac{3-2t^2}{t^2-1}$.

Gli integrali abeliani della forma

$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\ )dx,\ a \neq 0$

che sono basati su una conica Γ, si razionalizzano in modo sistematico. Distinguiamo vari casi.

(1) $a > 0$. Poniamo

$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}(x + t).$

Elevando al quadrato ed esplitando x si ottiene:

$x = \frac{at^2 - c}{b - 2at},$

$y = \sqrt{a}\frac{-at^2 + bt - c}{-b - 2at}$

$dx = \frac{-2a(at^2 - bt + c)}{(b - 2at)^2}dt$

Sottocaso: Se $a > 0$ e il polinomio

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

(eventualmente anche $\alpha = \beta$, cioè $\Delta \geq 0$), possiamo usare un altro metodo. Poniamo

$$t(x - \alpha) = \sqrt{a}\sqrt{(x - \alpha)(x - \beta)}$$

Elevando al quadrato e semplificando, ottengo

$$t^2(x - \alpha) = a(x - \beta)$$

che è di primo grado in x che posso ricavare

$$x = \phi(t) := \frac{\alpha t^2 - a\beta}{t^2 - a}$$

$$\int t(x - \alpha)dx = \int t(\phi(t) - \alpha)\phi'(t)dt$$

e questo razionalizza l'integrale.

(2) $a < 0$; se il polinomio $ax^2 + bx + c$ non avesse radici allora sarebbe negativo su tutto $\mathbb{R}$ e la funzione integranda non avrebbe mai senso. Quindi supponiamo che

$$ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta) = -a(x-\alpha)(\beta-x)$$
$(\Delta \geq 0)$

Operando analogamente a quanto fatto sopra

$$t(x-\alpha) = \sqrt{-a}\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}$$

$t^2(x-\alpha) = -a(\beta-x)$ etc.

Il secondo metodo funziona analogamente.

Un esempio.

$\int \sqrt{4-x^2}dx = \int \sqrt{(x+2)(2-x)}dx$

dove la funzione integranda è definita sull'intervallo $(-2,2)$.

Poniamo

$t(x+2) = \sqrt{(x+2)(2-x)}$

$t^2(x+2) = (2-x)$

$x = \frac{2-2t^2}{t^2+1} := \phi(t)$

da cui, mediante tale cambiamento di variabile,

$\sqrt{4-x^2} = t(\phi(t)+2) = \frac{4t}{1+t^2}$

$dx = -\frac{8t}{(1+t^2)^2}$

$\int \sqrt{4-x^2}dx = \int \frac{-32t^2}{(1+t^2)^3}dt \ \ldots$

Un altro cambiamento di variabile:

$x = 2\sin(t)$, $t = \arcsin(x/2)$, $dx = 2\cos(t)dt$

$x \in (-2, 2)$, $t \in (-1, 1)$

$\int \sqrt{4 - x^2}dx = 4\int \cos^2(t)dt = 2\sin(t)\cos(t) + 2t + \mathbb{R} =$

$x\sqrt{1 - x^2/4} + 2\arcsin(x/2) + \mathbb{R}$.

Funzioni razionali trigonometriche

$R(X,Y)$ razionale.

$\int R(\sin(x), \cos(x))dx$

Ricordiamo che

$\frac{2\tan(x/2)}{1+\tan^2(x/2)} = 2\sin(x/2)\cos(x/2) =$

$\sin(x/2 + x/2) = \sin(x)$

analogamente

$\cos(x) = \frac{1-\tan^2(x/2)}{1+\tan^2(x/2)}$

quindi, ponendo

$t = \tan(x/2)$, $x = 2\arctan(t)$

$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$dx = \frac{2}{1+t^2}dt$

questo razionalizza l'integrale.

$\int R(\sin(x), \cos(x))dx = \int R(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2})\frac{2}{1+t^2}dt$

Un esempio.

$\int \frac{1}{\sin(x)} dx = \int \frac{1+t^2}{2t} \frac{2}{1+t^2} dt =$

$\int \frac{1}{t} dt = \log(|t|) + \mathbb{R} =$

$\log(|\tan(x/2)|) + \mathbb{R}.$

In certi sottocasi ci sono razionalizzazioni più semplici.

$I := \int R(\sin^2(x), \cos^2(x), \tan(x))dx$

$\tan(x) = t$, $x = \arctan(t)$

$\sin^2(x) = \frac{t^2}{1+t^2}$, $\cos(x) = \frac{1}{1+t^2}$,

$dx = \frac{1}{1+t^2}$

$I = R(\frac{t^2}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2}, t)\frac{1}{1+t^2}dt$

$I := \int R(\sin(x), \cos^2(x)) \cos(x) dx$

$\sin(x) = t,\ dt = \cos(x) dx$

$I = \int R(t, 1 - t^2) dt.$

Valori approssimati di integrali definiti - Cenni

Supponiamo che $f : I \to \mathbb{R}$ sia non negativa, derivabile con derivata continua e che $[a, b] \subset I$. Allora esiste $M > 0$ tale che $|f'(x)| < M$ per ogni $x \in [a, b]$. Suddividiamo $[a, b]$ in n sottointervalli $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ... $[x_{n-1}, x_n]$, $x_0 = a$, $x_n = b$, di uguale lunghezza

$h := (b - a)/n$.

Consideriamo

$R_n = \sum_{k=1}^{n} hf(x_{k-1})$

Vogliamo stimare $E := |\int_a^b f(x)dx - R_n|$.

$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx$

Da cui

$E \leq \sum_k E_k$, $E_k = |\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx - f(x_{k-1})h| =$

$|\int_{x_{k-1}}^{x_k}(f(x) - f(x_{k-1}))dx|$

Ponendo $t = x - x_{k-1}$ e usando il teorema di Lagrange

$E_k = |\int_0^h f'(y_{k,t})tdt|$

$E_k \leq \frac{M}{2}h^2$

$E \leq \frac{M}{2}\frac{(b-a)^2}{n}$

quindi l'errore tende a 0 per $n \to +\infty$, asintoticamente a $1/n$.

$e^x = \sum_{k=0}^n x^k/k! + e^y x^{n+1}/(n+1)!$

Poiché $e^y < e < 3$ se $y \in (0,1)$, il resto della formula di Taylor è maggiorato da

$3x^{n+1}/(n+1)!$. Sostituendo x con x^2 e integrando fra 0 e 1,

$\int_0^1 e^{x^2} dx \leq 1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)n!} +$

$3/(n+1)! \int_0^1 x^{2(n+1)} dx =$

$1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)n!} + \frac{3}{(n+1)!(2n+3)}$

Imponendo che l'ultimo termine sia minore di 10^{-4}, si verifica che basta prendere $n = 6$. Per cui

$\int_0^1 e^{x^2} dx \sim 1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{13 \cdot 6!}$

con un errore minore di 10^{-4}.

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Consideriamo la suddivisione di $[a, b]$, gia' considerata prima, in n sottointervalli $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $\ldots$ $[x_{n-1}, x_n]$, $x_0 = a$, $x_n = b$, di uguale lunghezza

$h_n := (b - a)/n.$

Consideriamo la successione

$a_n = h_n \sum_{k=1}^{n} f(x_k)$

Allora

$\lim_{n\to\infty} a_n = \int_a^b f(x)dx$

Esempio.

$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3}$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$