Serie numeriche

Sia a_n, $n \geq n_0$, una succesione di numeri reali.

La scrittura

$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$

è detta **la serie che ha a_n come successione dei termini**.

A volte scriveremo $\sum_{n \geq n_0} a_n$ o anche semplicemente $\sum_n a_n$. Inoltre, per semplicità, porremo spesso $n_0 = 0$, ma tutto ha senso per ogni $n_0 \geq 0$. Possiamo sempre ricondurci al caso $n_0 = 0$ considerando

$\sum_{n \geq 0} b_n$, $b_n = a_{n_0+n}$.

Per adesso sono solo un simbolo e un nome senza significato; vogliamo darglielo.

La scrittura suggerisce di considerare la somma di *infiniti* termini

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_j + \ldots$

e vogliamo dare un senso a questa somma infinita.

Noi sappiamo fare la somma di un numero finito di termini. Poniamo allora

$$s_0 = a_0,\ s_1 = a_0 + a_1, \ldots, s_m = \sum_{n=0}^{m} a_n, \ldots$$

s_m è detta la **successione delle somme parziali** della serie.

• Diciamo che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è **convergente** se esiste finito $\lim_{m\to\infty} s_m = L \in \mathbb{R}$.

In tal caso scriviamo

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = L$

ed L è, per definizione, la **somma della serie**.

• Diciamo che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è (positivamente o negativamente) **divergente** se il limite delle somme parziali esiste ed è $\pm\infty$,

$\lim_{m\to\infty} s_m = \pm\infty$

In tal caso scriviamo

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \pm\infty$

e diciamo che la somma della serie è $\pm\infty$.

• Se **non** esiste $\lim_{m\to\infty} s_m$, allora diciamo che la serie è **irregolare** (quindi una serie è **regolare** se è convergente o divergente).

Studiare il comportamento di una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, significa determinarne il *tipo*, cioè se è convergente, divergente o irregolare. Quando è regolare (in particolare convergente) determinare (o stimare) se possibile la sua somma.

Osservazioni.

- Ogni successione b_m, $m \geq 0$, può essere considerata come la successione delle somme parziali di una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Basta porre, in modo induttivo

$$a_0 = b_0,\ a_n = b_n - b_{n-1}$$

Quindi studiare il comportamento di una serie non comporta apparentemente niente di nuovo rispetto allo studio del comportamento delle successioni. Però il punto di vista delle serie introduce un modo diverso di considerare, organizzare la questione, che avrà sviluppi interessanti.

Indichiamo intanto un'interpretazione geometrica della somma di una serie che in seguito metterà in relazione serie e teoria dell'integrazione.

Cominciamo con una digressione sulla lunghezza degli intervalli **orientati**. In genere, quando scriviamo $[a, b]$ sottointendiamo che $a < b$. In tal caso

$$b - a = |b - a| = |a - b| > 0$$

è la *lunghezza* del segmento, una volta che abbiamo fissato il segmento $[0, 1]$ come unità di misura.

Scriviamo ora $[[a, b]]$ per indicare l'intervallo di estremi **ordinati** a, b, nel senso che a è il primo estremo, b il secondo, senza richiedere che necessariamente il primo estremo a sia $a < b$. Cioè non richiediamo che l'ordinamento dei vertici sia quello indotto dall'ordine di $\mathbb{R}$. Allora

$$b - a = \pm|b - a| = \pm|a - b|$$

e il segno è negativo se e solo se $a > b$.

Possiamo interpretare la cosa dicendo che $[[a,b]]$ è il segmento **orientato** dalla 'freccia' che va dal primo estremo a verso il secondo estremo b. L' orientazione è **positiva** (da sinistra verso destra) se il primo estremo a è anche minore di b rispetto all' ordinamento usuale di $\mathbb{R}$. Altrimenti l'orientazione è **negativa** (da destra verso sinistra). Possiamo codificare questa alternativa con un segno

$\sigma([[a,b]]) = \pm 1$ così che

$b - a = \sigma([[a,b]])|b - a|$

è la lunghezza "algebrica" del segmento orientato e coincide con la lunghezza "geometrica" se e solo se l'orientazione è positiva. Tutto si estende al caso degenere $a = b$, per cui $b - a = 0$.

Vogliamo estendere quanto detto all'area dei rettangoli. In $\mathbb{R}^2$, indichiamo con $T(a,b,c)$ il rettangolo che come vertici ordinati i punti di coordinate

$$(a,0),(b,0),(b,c),(a,c)$$

Possiamo pensarlo come il prodotto dei segmenti orientati $[[a,b]] \times [[0,c]]$.

Supponiamo che $a < b$ e $c > 0$ (per cui $[[a,b]] = [a,b]$, $[[0,c]] = [0,c]$). Allora

$$A(a,b,c) := (b-a)c = |b-a||c| = |a-b||c| > 0$$

è l' area "geometrica" abituale del rettangolo $T(a,b,c)$, una volta che abbiamo fissato il quadrato $T(0,1,1)$ come unità di misura.

In generale $A(a,b,c) = \pm|A(a,b,c)|$

Come nel caso dei segmenti, vogliamo interpretare la cosa come l'area "algebrica" del rettangolo orientato, per una opportuna nozione di orientazione codificata per mezzo di un segno.

Poniamo allora

$$\sigma(T(a,b,c)) = \sigma([[a,b]])\sigma([[0,c]])$$

$$A(a,b,c) = \sigma(T(a,b,c))|A(a,b,c)|$$

L'area algebrica coincide con l'area geometrica se e solo se il rettangolo ha segno (orientazione) positivo. Notiamo che se propaghiamo l'orientazione del lato $[[a,b]]$ su tutto il perimetro del rettangolo, il segno è positivo (risp. negativo) se e solo se il perimetro viene percorso in senso antiorario (risp. orario).

Si noti che tutto è compatibile con l' usuale regola del segno di un prodotto:

$$++ = +, +- = -+ = -, -- = +.$$

Questo si estende ai casi degeneri per cui $a = b$ o $c = 0$ per cui $A(a,b,c) = 0$.

Consideriamo una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Possiamo associare ad ogni termine a_n della serie, il rettangolo orientato $T(n, n+1, a_n)$. Il segno (cioè l'orientazione) del rettangolo coincide con il segno di a_n.

$a_n = A(n, n+1, a_n)$ è l'area algebrica del rettangolo.

$s_m = a_0 + \cdots + a_m$

si interpreta come l'area algebrica della regione del piano data dall'unione dei primi m rettangoli. Se la serie converge ad $L \in \mathbb{R}$, allora possiamo considerare la somma della serie come l'area algebrica della regione del piano data dall'unione infinita di tutti i rettangoli. Se la serie diverge potremo dire che l' area è $\pm\infty$. Se la serie è irregolare possiamo dire che tale area non è definita.

Una variazione sullo stesso tema. Con le stesse notazioni di prima, la successione

$s_m/(m+1)$

è la successione delle *medie aritmetiche* della successione dei termini a_n della serie. Abbiamo visto a suo tempo che se

$a_n \to L \in \bar{\mathbb{R}}$, allora $s_m/m \to \bar{L}$.

Interpretiamo geometricamente la situazione. Per ogni m, suddividiamo l'intervallo $[0,1]$ per mezzo degli $m+1$ sotto-intervalli di lunghezza $1/m$

$$[0,1/m],[1/m,2/m],[2/m,3/m],\dots,[1-1/m,1]$$

Consideriamo la regione del piano R_m, contenuta nella striscia $[0,1]\times\mathbb{R}$, formata dall'unione dei rettangoli

$$[k/m,k+1/m]\times[[0,a_m]],\ k=0,\dots,(m-1)/m.$$

Allora la media $s_m/(m+1)$ può essere interpretata come l'area "algebrica" della regione R_m. Se $s_m/m \to L$, possiamo immaginare che le regioni R_m convergano, per $m \to \infty$, ad una regione limite R, contenuta nella stessa striscia, di area limite uguale a L. Se la successione delle medie non è regolare, possiamo pensare che non ci sia una regione limite ben definita, o che non sia ben definita la sua area algebrica.

Cominciamo con alcune proprietà generali delle serie.

Condizione **necessaria** *affinché la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *sia convergente è che* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *(la successione dei termini della serie deve essere infinitesima per* $n \to \infty$*).*

Dim. Abbiamo visto che $a_n = s_n - s_{n-1}$. Se $s_n \to L \in \mathbb{R}$, allora $a_n \to L - L = 0$.

Due serie che differiscono solo per un numero finito di termini sono dello stesso tipo (convergente, divergente o irregolare) .

Infatti, ponendo $\tilde{s}_m$, s_m le rispettive successioni delle somme parziali, allora esiste una costante C tale che definitivamente $\tilde{s}_m = s_m + C$.

Un caso particolare del punto precedente si ha azzerando i primi $k+1$ termini di $\sum_n a_n$, $k \geq 0$. Se la serie iniziale converge, allora tutte queste serie convergono. Indichiamo con R_k la somma. R_k è detto *resto k-esimo della serie* $\sum_n a_n$. Abbiamo allora un'altra **condizione necessaria** per la convergenza della serie data.

Se $\sum_n a_n = L \in \mathbb{R}$, *allora* $\lim_{k\to\infty} R_k = 0$.

Dim. $\lim_{k\to\infty} R_k = \lim_{k\to\infty}(L - s_{k+1}) =$

$L - \lim_{k\to\infty} s_{k+1} = L - L = 0$

Data una serie $\sum_n a_n$, per ogni scalare $\lambda \in \mathbb{R}$, consideriamo la serie $\lambda \sum_n a_n := \sum_n \lambda a_n$.

Se la serie $\sum_n a_n$ è regolare di somma $S \in \bar{\mathbb{R}}$, allora $\lambda \sum_n a_n$ è regolare con somma λS. Se la serie iniziale è irregolare e $\lambda \neq 0$, allora $\lambda \sum_n a_n$ è irregolare.

Infatti, se s_m è la successione delle somme parziali della prima serie, λs_m lo è per la seconda; si applicano allora le proprietà algebriche dei limiti.

Siano $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ due serie regolari di somma S e S' rispettivamente, $S, S' \in \bar{\mathbb{R}}$.

Se la somma $S + S' \in \bar{\mathbb{R}}$ non è indeterminata, allora $\sum_n (a_n + b_n)$ è regolare di somma $S + S'$.

Ancora una volta ci riconduciamo alle proprietà algebriche dei limiti.

Serie a termini non negativi.

Una serie $\sum_n a_n$ è a termini non negativi (positivi) se per ogni n, $a_n \geq 0$ ($a_n > 0$).

Fino ad avviso contrario, per un po' tratteremo solo serie a termini non negativi.

Ogni serie a termini non negativi è regolare. Se è convergente, allora la somma $S \geq 0$. Se è divergente, allora la somma è $+\infty$.

Infatti, la successione delle somme parziali s_m è crescente, quindi

$\lim_{m\to\infty} s_m = \sup\{s_m\}$

e l'estremo superiore è $+\infty$ se e solo se la successione s_m non è superiormente limitata. Altrimenti appartiene a $\mathbb{R}^+$. Se la serie è a termini positivi, allora s_m è strettamente crescente e la somma della serie è > 0.

Criterio del confronto

Siano $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ due serie a termini non negativi.

- *Se definitivamente* $b_n \geq a_n$ *e* $\sum_n b_n$ *è convergente di somma* S *, allora anche* $\sum_n a_n$ *è convergente di somma* $S' \leq S$.

- *Se definitivamente* $b_n \geq a_n$ *e* $\sum_n a_n$ *è divergente, allora anche* $\sum_n b_n$ *è divergente.*

Si riconduce al criterio del confronto per le successioni applicato alle successioni delle somme parziali.

Criterio del confronto asintotico.

Siano $\sum_n a_n$ *e* $\sum_n b_n$ *a termini positivi. Supponiamo che esistano due costanti* $k, h > 0$ *Tali che definitivamente* $h \leq a_n/b_n \leq k$. *Allora le due serie sono dello stesso tipo*

Segue applicando il criterio del confronto ed altri fatti generali visti prima.

Per una forma della permanenza del segno, le ipotesi dell'enunciato sono verificate se

$\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. In tal caso $l > 0$.

Esempi.

Sia $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Consideriamo la serie (detta **serie geometrica di ragione** a).

$\sum_{n=0}^{\infty} a^n$

È a termini positivi quindi è regolare.

Se $a = 1$, $s_m = m + 1$, per cui la serie diverge a $+\infty$.

Se $a \neq 1$, per cose già note,

$s_m = \sum_{n=0}^{m} a^m = \frac{1-a^{m+1}}{1-a}$

Se $a < 1$, $s_m \to \frac{1}{1-a}$, la serie è convergente e abbiamo calcolato la sua somma.

Se $a > 1$, $s_m \to +\infty$, la serie diverge a $+\infty$.

Sia $\alpha > 0$. A suo tempo abbiamo introdotto l'allineamento decimale normale univocamente associato ad α e abbiamo formalmente scritto

$\alpha = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$

Le considerazioni fatte a suo tempo possono essere riformulate e precisate dicendo che la serie (a termini positivi)

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$

converge e la sua somma è proprio il numero α. In particolare, la convergenza si può ottenere per confronto.

Per $n \geq 1$, $\frac{a_n}{10^n} \leq \frac{9}{10^n}$,

la serie $\frac{9}{10} \sum_{n \geq 0} (\frac{1}{10})^n$ converge in quanto multiplo della serie geometrica di ragione $\frac{1}{10} < 1$.

Per avere un esempio di serie irregolare dobbiamo considerare termini di segno variabile.

$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$.

$s_0 = 1, s_1 = 0, s_2 = 1, \ldots$

$s_{2k} = 1$, $s_{2k+1} = 0$, quindi per il criterio delle successioni estratte, s_m non ha limite e quindi la serie è irregolare.

Consideriamo la serie, detta di Mengoli,

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

È a termini positivi, quindi è regolare, inoltre verifica la condizione necessaria sulla successione dei termini per essere convergente. Studiamo la successione delle somme parziali. Si verifica algebricamente che

$a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ quindi (gli addendi intermedi si cancellano) $s_m = 1 - \frac{1}{m+1}$, $s_m \to 1$.

La serie è convergente di somma uguale a 1.

Si consideri la serie detta **armonica**

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

È a termini positivi per cui è regolare. Verifica la condizione necessaria sui termini per essere convergente. Vedremo però che essa è divergente: **la condizione necessaria non è sufficiente**.

Cominciamo con stabilire una condizione **necessaria** affinché una (qualsiasi) successione b_n abbia limite finito.

Se $b_n \to L \in \mathbb{R}$, *allora per ogni* $\epsilon > 0$ *esiste* $\bar{n}$ *tale che per ogni* $n, m > \bar{n}$, $|b_n - b_m| < \epsilon$.

A parole diciamo che se b_n è convergente, allora verifica la *proprietà di Cauchy*. Si può dimostrare (usando la compattezza per successioni degli intervalli chiusi e limitati) che tale proprietà è anche condizione **sufficiente** per la convergenza di b_n. Qui ci basta che sia necessaria.

Dim. Per ogni $\tilde{\epsilon} > 0$ esiste $\bar{n}$ tale che per ogni $n > \bar{n}$, $|b_n - L| < \tilde{\epsilon}$. Ponendo, $\tilde{\epsilon} = \epsilon/2$, se $n, m > \bar{n}$,

$$|b_n - b_m| = |(b_n - L) - (b_m - L)| \leq$$

$$|b_n - L| + |b_m - L| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

Per dimostrare che una serie $\sum_n a_n$ non è convergente, basta dimostrare che la successione delle somme parziali non verifica la proprietà di Cauchy. In questa situazione la proprietà di Cauchy può essere riformulata come segue:

Per ogni $\epsilon > 0$*, esiste* $\bar{m}$ *tale che per ogni* $m > \bar{m}$*, per ogni* $p \geq 0$*,* $|a_m + a_{m+1} + \cdots + a_{m+p}| < \epsilon$

Applichiamo quanto detto alla serie armonica. Per ogni $k \geq 1$, si consideri

$$\frac{1}{2^{k-1}+1} + \frac{1}{2^{k-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^k}$$

L'ultimo addendo è il più piccolo e ci sono 2^{k-1} addendi. Quindi

$$\frac{1}{2^{k-1}+1} + \frac{1}{2^{k-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^k} > \frac{2^{k-1}}{2^k} = \frac{1}{2}$$

Poiché k può essere preso arbitrariamente grande, la successione delle somme parziali della serie armonica non verifica la proprietà di Cauchy, quindi la serie è divergente.

$\sum_{n\geq 1} 1/n^2$

$1/n^2 < 1/(n-1)n$

Per confronto con la serie di Mengoli, la serie data è convergente.

A variare del parametro $a > 0$, consideriamo la serie $\sum_n 1/n^a$

Se $a < 1$, $1/n^a > 1/n$, quindi per confronto con la serie armonica, diverge.

Se $a \geq 2$, $1/n^a < 1/n^2$, quindi per confronto con il caso $a = 2$ già visto, la serie converge. Cosa succede per $1 < a < 2$?

Consideriamo in generale una serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ a termini positivi, con successione dei termini **decrescente**. Per ogni $k \geq 0$, poniamo

$$n(k) = 2^{k+1} - 1.$$

Allora valgono se seguenti disuguaglianze (cosiddetto "*Lemma di condensazione*":

$$\sum_{j=0}^{k} 2^j a_{2^{j+1}} < \sum_{j=1}^{n(k)} a_j < \sum_{j=0}^{k} 2^j a_{2^j}$$

Infatti (usando il fatto che a_n è decrescente)

$$2a_4 < a_2 + a_3 < 2a_2$$

$$2^2 a_8 < a_4 + a_5 + a_6 + a_7 < 2^2 a_4$$

$$2^3 a_{16} < a_8 + \cdots + a_{15} < 2^3 a_8$$

$$\cdots$$

$$2^j a_{2^{j+1}} < a_{2^j} + \cdots + a_{2^{j+1}-1} < 2^j a_{2^j}$$

Sommando si ottengono le disuguaglianze volute.

Applichiamo tutto questo a $a_n = \frac{1}{n^a}$ con $a > 1$. Otteniamo in particolare che

$$\sum_{n=1}^{n(k)} \frac{1}{n^a} < \sum_{n=0}^{k} (\frac{1}{2^{a-1}})^n$$

Poiché $\frac{1}{2^{a-1}} < 1$, essendo $a > 1$, la serie geometrica di tale ragione converge, per confronto converge anche $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^a}$.

Vale il seguente fatto.

Al variare del parametro $a > 0$, si considerino le serie

$\sum_{n\geq 1} 1/n^a$, $\sum_{n\geq 2} 1/n(\log(n))^a$.

Esse sono convergenti per $a > 1$, divergenti per $a \leq 1$

Nel caso di $\sum_{n\geq 1} 1/n^a$, lo abbiamo dimostarto. Una dimostrazione più semplice e di entrambi i casi è posticipata a quando disporremo del calcolo integrale.

La serie di Mengoli è un esempio di serie cosidetta *telescopica*. In generale una serie telescopica a termini positivi è della forma

$\sum_{n\geq 1}(b_n - b_{n+p})$

dove b_n è decrescente e $p \geq 1$. Se $m > p$

$s_m = b_1 + \cdots + b_p - (b_{m+1} + \cdots + b_{m+p})$.

Se, per esempio, $b_n \to L \in \mathbb{R}$, la serie converge con somma $b_1 + \cdots + b_p - pL$.

La serie di Mengoli è di questo tipo, $b_n = 1/n$, $p = 1$.

Vediamo qualche altro esempio.

$\sum_{n\geq 1} 3/(n^2+3n)$

Si riconosce che $3/(n^2+3n) = 1/n - 1/(n+3)$. Quindi $b_n = 1/n$, $p = 3$.

$\sum_{n\geq 1}(4n+4)/(n(n+2))^2$

E' telescopica con $b_n = 1/n^2$, $p = 2$.

$\sum_{n\geq 1} \log(1+2/n)$

$\log((n+2)/n) = \log(n+2) - \log(n)$

quindi è telescopica con $b_n = -\log(n)$, $p = 2$

$s_m = -\log(1) - \log(2) + \log(m+1) + \log(m+2)$, $s_m \to +\infty$

per cui la serie diverge.

Criterio della radice.

Sia $\sum_n a_n$ *a termini positivi. Supponiamo che esista una costante* $0 \leq h < 1$ *tale che definitivamente* $a_n^{1/n} \leq h$. *Allora la serie* $\sum_n a_n$ *è convergente.*

Dim. Definitivamente $a_n \leq h^n$. La serie geometrica $\sum_n h^n$ converge perché $h < 1$. Per confronto $\sum_n a_n$ converge.

Oss. Per permanenza del segno, le ipotesi sono verificate se $\lim_n a_n^{1/n} = L < 1$. Poiché la serie converge, allora $a_n \to 0$. Quindi ritroviamo il criterio della radice per le successioni.

Criterio del rapporto.

Sia $\sum_n a_n$ *a termini positivi. Supponiamo che esista una costante* $0 \le h < 1$ *tale che definitivamente* $a_{n+1}/a_n \le h$. *Allora la serie* $\sum_n a_n$ *è convergente.*

Dim. Possiamo assumere che la disuguaglianza valga per ogni n, eventualmente eliminando un numero *finito* di termini iniziali per cui non vale. Allora $a_1 \le a_0 h, a_2 \le a_1 h \le a_0 h^2 \ldots$. Per induzione $a_n \le a_0 h^n$. Allora si conclude come prima per confronto con la serie convergente $\sum_n a_0 h^n = a_0 \sum_n h^n$.

Oss. Per permanenza del segno, le ipotesi sono verificate se $\lim_n a_{n+1}/a_n = L < 1$. Poiché la serie converge, allora $a_n \to 0$. Quindi ritroviamo il criterio del rapporto per le successioni.

Esempi

$\sum_n \frac{1}{n^n}$

$(1/n^n)^{1/n} = 1/n \to 0 < 1.$

Per il criterio della radice, converge.

Fissiamo $a > 0$, $\sum_n a/n!$

$\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}/\frac{a^n}{n!} = a/(n+1) \to 0 < 1.$

Per il criterio del rapporto, la serie converge.

$\sum_{n\geq 0}(n^2+6)/2^n$

$a_n^{1/n} = (n^2+6)^{1/n}/2 \to 1/2 < 1$

quindi per il criterio della radice converge.

$\sum_n (n^2+3)/(n^2+5)$

La successione dei termini $a_n \to 1$, quindi non è infinitesima. La serie diverge.

$\sum_{n\geq 1}(n^2+3n+5)(7n^3+4)$

Consideriamo $b_n = 1/n$,

$a_n/b_n = n(n^2+3n+5)(7n^3+4) \to 1/7$ per confronto asintotico con la serie armonica, la serie data diverge.

$\sum_{n\geq 1}(\sin(1/n) - \arctan(1/n))$

$b_n = 1/n^3$,

$\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = \lim_{x\to 0}(\sin(x) - \arctan(x))/x^3 = 1/6$

per confronto asintotico la serie converge, come $\sum_n 1/n^3$.

Altre proprietà delle serie a termini positivi.

Enunciamole, senza dimostrazione.

Prodotto di Cauchy. Siano $\sum_{n\geq 1} a_n$, $\sum_{n\geq 1} b_n$ due serie a termini positivi. Il loro prodotto (di Cauchy) è la serie

$(\sum_{n\geq 1} a_n)(\sum_{n\geq 1} b_n) :=$

$\sum_{n\geq 1} c_n$, $c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_n b_1$

Se le due serie date convergono con somma a e b rispettivamente, allora il loro prodotto converge con somma ab.

Sia $\sum_n a_n$ a termini positivi. Sia $j : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ un'applicazione bigettiva; può essere considerata come un *riordinamento* degli indici. Consideriamo la serie

$$\sum_n b_n = \sum_n a_{j(n)}$$

Diciamo che essa è ottenuta da $\sum_n a_n$ riordinando i suo termini (per mezzo dell'applicazione j).

Le due serie $\sum_n a_n$, $\sum_n b_n$ sono dello stesso tipo e hanno la stessa somma.

Serie a termini di segno arbitrario.

Una serie $\sum_n a_n$ (con termini di segno arbitrario) si dice **assolutamente convergente** se la serie $\sum_n |a_n|$ è convergente.

Una serie assolutamente convergente è convergente.

Dim. Dato un numero reale t, poniamo $t^+ = t$ se $t \geq 0$, $t^+ = 0$ se $t < 0$. Analogamente $t^- = 0$ se $t > 0$, $t^- = -t$ se $t \leq 0$. t^+ e t^- sono sempre ≥ 0. È immediato che

$t = t^+ - t^-$, $|t| = t^+ + t^-$, da cui $t^+, t^- \leq |t|$

Associamo a $\sum_n a_n$ le due serie a termini non negativi

$\sum_n a_n^+$, $\sum_n a_n^-$.

Poiché $a_n^{\pm} \leq |a_n|$ e, per ipotesi, $\sum_n |a_n|$ converge, applicando il criterio del confronto abbiamo che entrambe le serie $\sum_n a^{\pm}$ convergono, diciamo a $S^{\pm}$ rispettivamente. Ma allora

$\sum_n a_n = \sum_n (a_n^+ - a_n^-)$ converge a $S^+ - S^-$.

Enunciamo, senza dimostrazione, un criterio di convergenza (detto di Leibnitz) per le serie a **segno alternato**

Sia a_n*,* $n \geq 0$*, una successione a termini non negativi, debolmente decrescente (*$a_n \geq a_{n+1}$*), infinitesima (*$a_n \to 0$*). Allora la serie a segni alterni*

$\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n$

è convergente. Inoltre le somme parziali di indice pari forniscono un valore approssimato per eccesso della somma, quelle di indice dispari un valore approssimato per difetto.

Oss. $a_n = 1/(n+1)$ verifica le ipotesi, quindi la serie $\sum_n (-1)^n 1/(n+1)$ converge, mentre la serie armonica diverge. Quindi questa serie a segni alterni è un esempio di serie **convergente ma non assolutamente convergente**.

Abbiamo visto che riordinando gli indici di una serie a termini positivi, il tipo e la somma restano invariati.

Se una serie (a termini di segno arbitrario) è convergente ma **non** assolutamente convergente, il comportamento rispetto al riordinamento degli indici è completamente diverso e sorprendente. Si può dimostrare (la dimostrazione va oltre i mezzi di questo corso):

Comunque si fissi $L \in \bar{\mathbb{R}}$, esiste un riordinamento degli indici $j : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, tale che

$\sum_{n \geq 0} b_{j(n)} = L.$

Serie di potenze.

Sia a_n, $n \geq 0$, una successione numerica (con termini di segno arbitrario).

$\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ (x indeterminata)

è la *serie di potenze* (di centro $x_0 = 0$) associata alla successione. La somma parziale di indice m è un polinomio di grado $\leq m$. Fissato un valore della variabile $x = t \in \mathbb{R}$, otteniamo la serie numerica

$\sum_n a_n t^n$

di cui possiamo studiare il tipo ed eventualmente la somma. Sicuramente la serie di potenze converge nel punto $t = 0$, con somma $S(0) = a_0$.

Se la serie di potenze converge in un punto $t_0 \neq 0$, allora essa converge assolutamente per ogni t tale che $|t| < |t_0|$.

Dim. $a_n t_0^n \to 0$ perché la serie converge in t_0. Quindi esiste $H > 0$ tale che per ogni n, $|a_n t_0^n| < H$. Per ogni $t \in \mathbb{R}$,

$$|a_n t^n| = |a_n t_0^n||t/t_0|^n \leq H|t/t_0|^n$$

Se $|t/t_0| < 1$, $\sum_n |a_n t^n|$ è maggiorata dalla serie geometrica convergente $H \sum_n |t/t_0|^n$ e si conclude per confronto.

Abbiamo il seguente importante corollario.

Per ogni serie di potenze $\sum_n a_n x^n$, si verifica uno e uno solo dei seguenti casi

(1) La serie converge solo in $t_0 = 0$.

(2) L'insieme $C \subset \mathbb{R}$ dei punti t dove la serie converge è diverso da zero. Sia

$R = \sup\{|t|,\ t \in C\}$.

Allora se C non è limitato, $R = +\infty$ e la serie converge per ogni $t \in \mathbb{R}$. Se C è limitato, allora $R \in \mathbb{R}$, $R > 0$; la serie converge per ogni t tale che $|t| < R$, la serie non converge per $|t| > R$.

R è detto il **raggio di convergenza** della serie. Nel caso (1) diciamo che $R = 0$. Per i punti tali che $|t| = R$ il comportamento della serie non è determinato.

In certi casi il raggio R può essere calcolato.

(1) Supponiamo che $|a_n|^{1/n} \to l \in \bar{\mathbb{R}}$. *Allora*

$R = 1/l$.

(2) Supponiamo che $|a_{n+1}/a_n| \to l \in \bar{\mathbb{R}}$. *Allora*

$R = 1/l$.

Dim. (1) $|a_n t^n|^{1/n} \to l|t|$. Applichiamo il criterio della radice. Per esempio, se $l \in \mathbb{R}$, la serie converge per $|t| < 1/l$, non converge se $|t| > 1/l$. I casi $l = 0, +\infty$ si trattano in modo simile.

(2) Si applica il criterio del rapporto invece di quello della radice.

Se $R > 0$, la serie di potenze definisce una funzione $S : I(0, R) \to \mathbb{R}$ che associa ad ogni $t \in I(0, R)$ la somma $S(t)$ della serie calcolata nel punto t.

Data una serie di potenze $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$,

$D(\sum_{n\geq 0} a_n x^n) := 0x^0 + \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$

si chiama la serie di potenze *derivata* della serie data. La sua somma in 0 vale

$DS(0) = a_1$.

Iterando, possiamo definire la serie derivata k-esima $D^{(k)}(\sum_{n\geq 0} a_n x^n)$, con somma in 0 uguale a $D^{(k)}S(0) = k!a_k$.

$P(\sum_n a_n x^n) := \sum_{n\geq 0}(a_n/(n+1))x^{n+1}$

si chiama la serie di potenze *primitiva* della serie data. È immediato che

$P(D(\sum_n a_n x^n)) = D(P(\sum_n a_n x^n)) = \sum_n a_n x^n$.

Valgono i seguenti importanti fatti.

Siano $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ una serie di potenze con raggio di convergenza $R > 0$, $S : I(0,R) \to \mathbb{R}$ la sua funzione somma. Allora:

(1) La serie derivata e la serie primitiva hanno lo stesso raggio di convergenza R.

(2) Indicando con $DS : I(0,R) \to \mathbb{R}$ la funzione somma della serie derivata, si ha che la funzione somma $S : I(0,R) \to \mathbb{R}$ è continua e derivabile e

$S'(t) = DS(t)$.

(3) La funzione somma $S : I(0,R) \to \mathbb{R}$ è C^∞,
$\sum_{n\geq 0} a_n x^n = S(0) + \sum_{n\geq 1} \frac{S^{(n)}(0)}{n!} x^n$

Diamo dei cenni di dimostrazione e qualche commento.

(1) Dimostriamo per esempio che la serie derivata ha raggio di convergenza $R_D \geq R$. Sia $t_0 \in I(0, R)$. Ragionando come in una dimostrazione precedente, esiste $H > 0$ tale che per ogni n

$$|na_n t^{n-1}| \leq (nH/|t_0|)|t/t_0|^{n-1}$$

quindi si ha convergenza della serie derivata se $|t| < |t_0|$.

In modo analogo si dimostra la stessa cosa per la serie primitiva, $R_P \geq R$. Poiché la serie data è la derivata della sua primitiva, si ha $R \geq R_P \geq R$, da cui $R_P = R$. Poiché la serie data è la primitiva della sua serie derivata, scambiando i ruoli, si ha $R = R_D$. Come voluto.

La dimostrazione di (2) è un pochino più delicata e ci limitiamo ad indicare il punto chiave. Consideriamo la continuità di $S(t)$. vogliamo verificare che per ogni $t_0 \in I(0, \mathbb{R})$

$$\lim_{t \to t_0} S(t) = \lim_{t \to t_0} \sum_n a_n t^n = S(t_0)$$

Se potessimo "*passare il limite dentro la sommatoria*", avremmo

$$\lim_{t \to t_0} S(t) = \sum_n \lim_{t \to t_0} a_n t^n =$$

$$\sum_n a_n t_0^n = S(t_0)$$

come voluto. Il punto è che è effettivamente **lecito** far passare il limite dentro la sommatoria. La ragione ultima di questo fatto è che per ogni intervallo chiuso e limitato $[a, b] \subset I(0, R)$, non solo per ogni $t_0 \in [a, b]$ il *resto* di ordine m di S in t_0

$R_m(S,0)(t_0) = S(t_0) - \sum_{n=0}^{m} a_n t_0^m$

converge a zero per $m \to \infty$, di più questa convergenza è **uniforme**:

Per ogni $\epsilon > 0$ esiste un $\bar{m}$ (che dipende solo da ϵ) tale che per ogni $t_0 \in [a,b]$, per ogni $m > \bar{m}$, $|R_m(S,0)(t_0)| < \epsilon$.

In modo analogo si tratta il limite del rapporto incrementale e quindi la derivata.

Il punto (3) si ottiene per induzione applicando (1) e (2) alle serie derivate successive. L'ultima formula ci dice che la somma parziale di indice m della serie di potenze coincide con il polinomio di Taylor di ordine m (di centro $x_0 = 0$) della funzione somma $S(x)$.

Serie di Taylor.

Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione C^∞ definita su un intervallo aperto I, $x_0 = 0 \in I$. La serie di potenze

$$f(0)x^0 + \sum_{n\geq 1} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

è detta la *serie di Taylor* della funzione (di centro $x_0 = 0$).

Si pone la seguente domanda naturale:

Supponiamo che la serie di Taylor di f abbia raggio di convergenza $R > 0$. $S : I(0, R) \to \mathbb{R}$ è la sua funzione somma. Esiste $\rho > 0$, $\rho \leq R$, $I(0, \rho) \subset I$, tale che per ogni $x \in I(0, \rho)$, $f(x) = S(x)$?

Se la risposta è “Si” , allora diciamo che la funzione f è **analitica** in un intorno di $x_0 = 0$. Posto $\bar{\rho}$ l'estemo superiore dei ρ che verificano la proprietà detta, allora per ogni $x \in I(0, \bar{\rho})$ la funzione ammette lo sviluppo in serie di Taylor

$$f(x) = f(0) + \sum_{n\geq 1} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Per quanto detto in precedenza, la funzione somma di una serie di potenze è analitica.

Ci sono funzioni C^∞ che **non** sono analitiche. Abbiamo già visto un esempio di funzione C^∞ *non costante* che ha tutte le derivate nulle in $x_0 = 0$.

Un altro esempio è la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita $f(x) = e^{-1/x^2}$ se $x \neq 0$, $f(0) = 0$.

La serie di Taylor di questa funzione è

$0 + \sum_{n \geq 1} 0x^n$

essa ha raggio di convergenza $R = +\infty$, la sua funzione somma è la funzione costante $S(x) = 0$. $S(x) \neq f(x)$ per ogni $x \neq 0$.

Viceversa, se una funzione analitica f ha tutte le derivate nulle in $x_0 = 0$, allora è necessariamente la funzione costante $f(x) = f(0)$ su $I(0, \bar{\rho})$.

È praticamente una tautologia che valga la seguente condizione **necessaria e sufficiente** affinché f sia analitica in un intorno di 0. Come al solito, indichiamo con $T_m(f, 0)(x)$ il polinomio di Taylor (di centro 0) di f di ordine m,

$$R_m(f, 0)(x) = f(x) - T_m(f, 0)(x)$$

il resto m-esimo. Allora si ha

f è analitica (in un untorno di zero) se e solo se esiste $\rho > 0$ come sopra tale che per ogni $x \in I(0, \rho)$,

$$\lim_{m\to\infty} R_m(f, 0)(x) = 0$$

Individuiamo ora una condizione **sufficiente** più "operativa" che implichi la validità della condizione tautologica.

Se esistono costanti positive M, L tali che per ogni $x \in I(0, \rho)$ e per ogni n si abbia

$$|f^{(n)}(x)| \leq ML^n$$

allora f è analitica (in un intorno di 0).

Dim. Usando la formula di Taylor con il resto di Lagrange, abbiamo che

$$R_m(f,0)(x) = \frac{x^{m+1}}{(m+1)!} f^{(m+1)}(\xi_x)$$

usando le ipotesi

$$|R_m(x)| \le \frac{(LR)^{m+1}}{(m+1)!} M$$

Poiché $\frac{(LR)^{m+1}}{(m+1)!} M \to 0$ per $m \to \infty$, per confronto di successioni, anche $R_m(x) \to 0$ come voluto.

Esempi

$f(x) = \exp(x)$

La sua serie di Taylor è

$1 + x + x^2/2! + \cdots + x^n/n! + \ldots$

Calcolando il raggio di convergenza usando il criterio del rapporto per $a_n = 1/n!$, si ha che $R = +\infty$. Poiché $f'(x) = f(x)$ e la funzione è crescente, per ogni $\rho \in \mathbb{R}$, $\rho > 0$, per ogni n, per ogni $x \in I(0, \rho)$, $|f^{(n)}(x)| \leq e^{\rho}$. Quindi si può applicare la condizione sufficiente e concudere che la somma della serie $S(x) = e^x$, per ogni $x \in \mathbb{R}$. Per esempio

$e = e^1 = \sum_{n \geq 0} 1/n!$

Considerazioni analoghe valgono per cos(x), sin(x). Le serie di Taylor sono rispettivamente

$$x - x^3/3! + x^5/5! + ... + (-1)^n x^{2n+1}/(2n+1)! + ..$$

$$1 - x^2/2! + x^4/4! + \cdots + (-1)^n x^{2n}/(2n)! + \ldots$$

Si noti che la serie derivata della prima è uguale alla seconda, la serie derivata della seconda è meno la prima. Entrambe hanno raggio di convergenza $R = +\infty$. Poiché sin$'(x)$ = cos(x), cos$'(x) = -$sin(x) ed entrambe le funzioni sono limitate, ≤ 1, su tutto $\mathbb{R}$, applicando il criterio sufficiente, possiamo concludere che le funzioni somma delle serie di Taylor coincidono con sin(x) cos(x) su tutto $\mathbb{R}$, rispettivamente.

La serie di potenze ‘geometrica’

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \ldots$$

ha raggio di convergenza $R = 1$ e come somma la funzione $S(x) = 1/(1-x)$. Da questo (scambiando x con $-x$) si ricava che anche la serie di potenze

$$1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$$

ha raggio di convergenza $R = 1$, con funzione somma $1/(1+x)$. La serie di potenze primitiva

$$x - x^2/2 + x^3/3 + \cdots + (-1)^{n-1}x^n/n + \ldots$$

ha raggio di convergenza $R = 1$ e funzione somma $S(x) = \log(1 + x)$.

Oss. La serie geometrica non converge nei punti estremi ± 1 dell’ intervallo $I(0, R) = I(0, 1)$. La serie logaritmica invece converge per $x = 1$ e non converge per $x = -1$.

Scambiando x con $-x^2$ nella serie geometrica, otteniamo la serie di potenze

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots$$

con raggio di convergenza $R = 1$ e funzione somma $S(x) = 1/(1 + x^2)$ Prendendo la serie primitiva otteniamo lo sviluppo in serie di potenze per $|x| < 1$

$$\arctan(x) =$$

$$x - x^3/3 + \dots + (-1)^n x^{2n+1}/(2n + 1) + \dots$$

Per esempio

$$\pi/4 = \arctan(1) = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \dots$$

Scambiando x con x^2 nella serie geometrica e prendendo la serie primitiva otteniamo lo sviluppo in serie per $|x| < 1$

$\log(\frac{1+x}{1-x}) =$

$2(x + x^3/3 + x^5/5 + \cdots + x^{2n+1}/(2n+1) + \dots)$

Per ogni numero reale α estendiamo il coefficiente binomiale ponendo

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)}{k!}$$

La funzione

$$f(x) = (1+x)^{\alpha} = e^{\alpha \log(1+x)}$$

è definita su la semiretta $(-1, +\infty)$.

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}.$$

Con calcoli un po' più laboriosi che omettiamo, si ottiene lo sviluppo in serie per $|x| < 1$

$$(1+x)^{\alpha} =$$

$$1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + \ldots$$

Ponendo sopra $\alpha = -1/2$, si ottiene lo sviluppo per $|x| < 1$

$\frac{1}{\sqrt{1+x}} =$

$1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\frac{3}{4}x^2 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2}\frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} x^n + \ldots$

Considerando la serie primitiva, con un po' di calcoli otteniamo lo sviluppo per $|x| < 1$

$\arcsin(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

dove $p!!$ indica il prodotto di tutti i numeri naturali non nulli, minori o uguali a p e della sua stessa parità. Per esempio $4!! = 2 \times 4 = 8$, $7!! = 3 \times 5 \times 7$.

Abbiamo discusso tutto con centro $x_0 = 0$. Come per gli sviluppi di Taylor, possiamo generalizzare la discussione intorno ad un centro x_0 arbitrario.

Si può dimostrare che tutte le funzioni 'elementari', cioè ottenute combinando le funzioni fondamentali (costanti, id, exp, sin) con le usuali procedure (restrizione, somma, prodotto, reciproco, composizione, inversa derivabile, ...) sono analitiche intorno ad ogni punto del loro insieme di definizione.

Si può anche dimostrare che la funzione somma $S : I(0, R) \to \mathbb{R}$ di una serie di potenze con centro $x_0 = 0$ è analitica in un intorno di ogni $x_0 \in I(0, R)$.