Correzione simulazione

Ex.: $A = \{0,1,2,3,4\}$. Quanti sono i sottoinsiemi di A con almeno 3 elementi?

$$\binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} = \frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3} + \frac{5\cdot4}{2} + 1 =$$

$$= 10+5+1 = 16$$

Ex.: $f: A \to A$ (A non necessariamente finito).

Allora $f \circ f$ bigettiva $\Rightarrow f$ è bigettiva.

Infatti, se $f \circ g$ è bigettiva, allora f è surgettiva e g è iniettiva. Dunque se $f \circ f$ è bigettiva, f è sia iniettiva sia surgettiva, cioè bigettiva

f iniettiva $\not\Rightarrow$ f bigettiva

(esempio: $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = 2\cdot n$)

Ex.: $x' - x = -t$, $x(0) = 1$

$x' - x = 0$ ha soluzioni $x(t) = ke^t$

Per una sol. particolare provo un polinomio di primo grado $x(t) = at+b \Rightarrow x' = a \Rightarrow$

$x' - x = a - (at+b) = -at + a - b$

Uguagliando a $-t$ ho $-a = -1$ $\quad a - b = 0$

cioè $a = 1$ $\quad b = 1$

la sol. generale è $x(t)=t+1+ke^{t}$

$x(0)=1 \quad \Rightarrow \quad 1=0+1+ke^{0}=1+k \Rightarrow k=0$

$x(t)=t+1 \qquad x(-2)=-2+1=-1$

Ex.: $x''+3x'+2x=0 \quad , x(0)=\frac{1}{2}, x'(0)=1$

$t^2+3t+2=(t+1)(t+2) \Rightarrow$ la sol. generale è

$x(t)=c_1e^{-t}+c_2e^{-2t}$ (-1 e -2 sono le radici di t^2+3t+2)

$x'=-c_1e^{-t}-2c_2e^{-2t}$

Sostituendo, $x(0)=c_1+c_2$ e $x'(0)=-c_1-2c_2$

$$\begin{cases} c_1+c_2=\frac{1}{2} \\ -c_1-2c_2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2=-\frac{3}{2} \\ c_1=2 \end{cases}$$

$x(t)=2e^{-t}-\frac{3}{2}e^{-2t}$

$x'(t)=-2e^{-t}+3e^{-2t}=e^{-t}(3e^{-t}-2)$

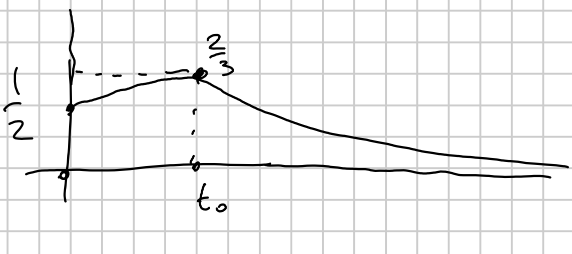
si annulla in $3e^{-t}-2=0 \Rightarrow e^{-t}=\frac{2}{3}$

t_0 t.c. $e^{-t}=\frac{2}{3}$ ($t_0>0$)

$\lim_{t\to+\infty} x(t)=0$

$x(0)=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$

$x(t_0)=2\cdot\frac{2}{3}-\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{3}-\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{9}=\frac{4}{3}-\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$



$$\max\{x(t),\ t \geq 0\} = \frac{2}{3}$$

Ex.: $\inf\left\{\sqrt{3}x - 2\sin x\ ,\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right\}$

Derivando $f(x) = \sqrt{3}x - 2\sin x$ ho $f'(x) = \sqrt{3} - 2\cos x$

che si annulla per $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, cioè $x = \frac{\pi}{6}$ $\left(x \in [0, 2\pi]\right)$.

In $x = 0 \Rightarrow \sqrt{3}\cdot 0 - 2\cdot\sin 0 = 0$

In $x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \sqrt{3}\frac{\pi}{6} - 2\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}\pi}{6} - 2\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}\pi - 6}{6}$ <0

In $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}\pi}{2} - 2\sin\frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{3}\pi - 4}{2}$ >0

$$\inf = \frac{\sqrt{3}\pi - 6}{6}$$

Ex.: $f : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \log(-x^3)$.

$x \in f^{-1}((0, +\infty)) \iff f(x) \in (0, +\infty) \iff$

$\log(-x^3) > 0 \iff -x^3 > 1 \iff x^3 < -1$

$\iff x < -1 \iff x \in (-\infty, -1)$

Ex.: $$\lim_{n\to+\infty} \frac{\overset{\to 1}{\sqrt[n]{2}} + \overset{\text{domina}}{n^2} + \overset{\to 0}{3^{-n}}}{(\log(n))^6 + 2 + \underset{\text{domina}}{n}} = +\infty$$ perché n^2 domina n

(scrivetelo per bene!)

Ex.: $$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^2+2}{n^2+n+1}\right)^{2n}$$

$$a_n = \left(\frac{n^2+2}{n^2+n+1}\right)^{2n} = \left(\frac{n^2+n+1 \; -n+1}{n^2+n+1}\right)^{2n} = \left(1 + \frac{-n+1}{n^2+n+1}\right)^{2n} =$$

$$=\left(1-\frac{n-1}{n^2+n+1}\right)^{2n}=\Bigg\{\bigg[\underbrace{\left(1-\frac{n-1}{n^2+n+1}\right)^{\frac{n^2+n+1}{n-1}}}_{\left(1-\frac{1}{y}\right)^{y}}\bigg]^{\frac{n-1}{n^2+n+1}}\Bigg\}^{2n}$$

$\left(1-\frac{1}{y}\right)^{y}$

$y\to+\infty$

tende a $\frac{1}{e}$

$$\frac{n-1}{n^2+n+1}\,2n = \frac{2n(n-1)}{n^2+n+1}\to 2$$

Dunque $\quad a_n\to\left(\frac{1}{e}\right)^2=\frac{1}{e^2}$

Ex.: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n}$ è geometrica di ragione $-\frac{1}{4}$, e

somma $\quad\displaystyle\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}=\frac{1}{\frac{5}{4}}=\frac{4}{5}.$

Ex.: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{n^a}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$ è a termini positivi

$$1-\cos\frac{1}{n}=1-\left(1-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Dunque $\quad\displaystyle\sqrt{n^a}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)\sim n^{\frac{a}{2}}\frac{1}{2n^2}\sim n^{-2+\frac{a}{2}}$

La serie converge $\iff -2+\frac{a}{2}<-1\iff a<2$

Ex.: $\displaystyle\frac{\sin x}{1-x}=\sin x\cdot\left(1+x+x^2+x^3+o(x^3)\right)=$

$$=\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)\left(1+x+x^2+x^3+o(x^3)\right)=$$

$$=x+x^2+x^3+o(x^3)-\frac{x^3}{6}+o(x^3)=x+x^2+\frac{5}{6}x^3+o(x^3)$$

Ex.: $f=o(x^3)\qquad g(x)=\underbrace{e^{-x}}_{\to 1 \text{ per } x\to 0}\sin x^2 f(x)\quad$ è $o(x^5)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}\sin x^2\, f(x)}{x^5}=\lim_{x\to 0}\underbrace{e^{-x}}_{\to 1}\underbrace{\frac{\sin x^2}{x^2}}_{\to 1}\underbrace{\frac{f(x)}{x^3}}_{\to 0}=0.$$