8 aprile 2020

Titolo nota 08/04/2020

INTEGRAZIONE (secondo Riemann)

Per definire l'integrale di una funzione, abbiamo bisogno di:

① Un intervallo chiuso e limitato $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ con $a<b$.

② Una funzione $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ LIMITATA, cioè tale che $\exists\, m, M \in \mathbb{R}$ con

$$m \leq f(x) \leq M \qquad \forall x \in [a,b].$$

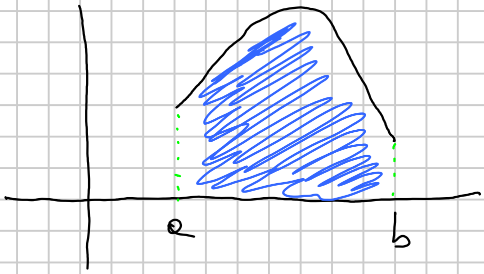
La funzione f si dice INTEGRANDO e a, b si chiamano ESTREMI DI INTEGRAZIONE.

L'integrale di f su $[a,b]$, quando esiste, è un numero che si indica con

$$\int_a^b f(x)\, dx$$ simbolo formale

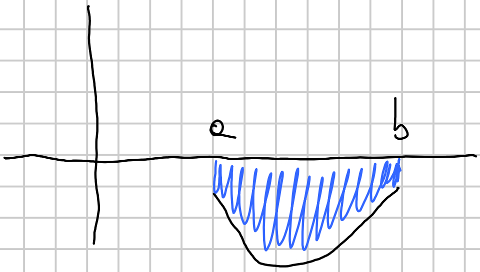
(a volte noto come "integrale definito").

Questo numero indica l'Area con segno della regione del piano delimitata dal grafico di f e dell'asse delle x, con segno $+$ dove f è positiva e segno $-$ dove f è negativa.



$\int_a^b f(x)\,dx =$

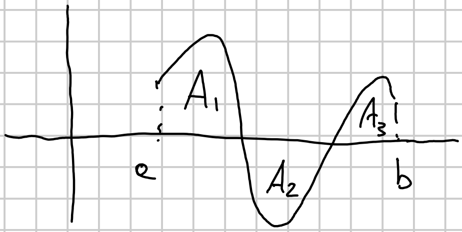
$=$ Area regione blu



$\int_a^b f(x)\,dx =$

$= -$ Area della regione blu

< 0

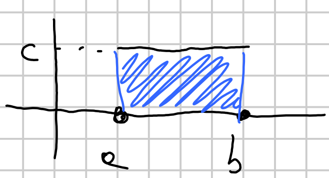


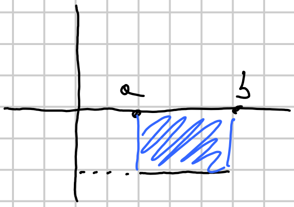
$\int_a^b f(x)\,dx = A_1 - A_2 + A_3$

Quella data è l'idea che sta dietro alla vera definizione (in particolare, oggi definiremo che cos'è l'Area di una regione come quelle descritte).

$$\boxed{\text{DEFINIZIONE di } \int_a^b f(x)\,dx}$$

Caso 1: f è costante, cioè $f(x) = c \quad \forall x \in [a,b]$.





In questo caso poniamo $\int_a^b f(x)\,dx = A(a,b,c)$,

cioè l'area (con segno) del rettangolo ORIENTATO

$T(a,b,c)$ di vertici $(a,0)$, $(b,0)$, (b,c), (a,c),

cioè $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\cdot c$

Stiamo supponendo per ora $a<b$, per cui $\int_a^b f(x)\,dx$ ha lo stesso segno di c.

Caso 2: f funzione elementare, o semplice, o a gradini (sono sinonimi), cioè

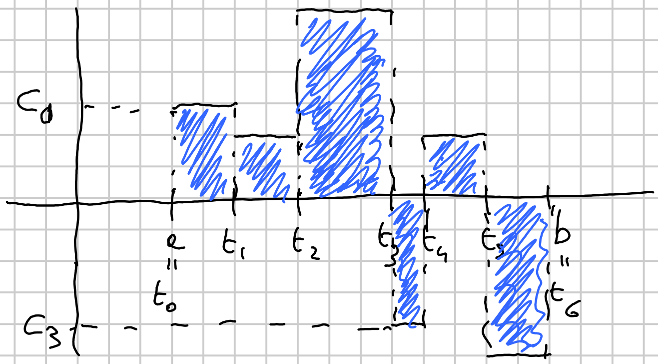
$\exists\, t_0, \dots, t_n$ con $t_0 = a$, $t_n = b$,

$t_0 < t_1 < \dots < t_n$ tali che

$f_{|[t_i, t_{i+1})}$ sia costante di valore c_i,

cioè $f(x) = c_i \quad \forall x \in [t_i, t_{i+1}), \; i \leq n-2$

$\forall x \in [t_i, t_{i+1}], \; i = n-1.$



In questo caso poniamo $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} A(t_i, t_{i+1}, c_i) =$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} c_i\,(t_{i+1} - t_i).$$

Caso 3: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata qualsiasi.

Si definiscono l'integrale inferiore e superiore di

f come segue:

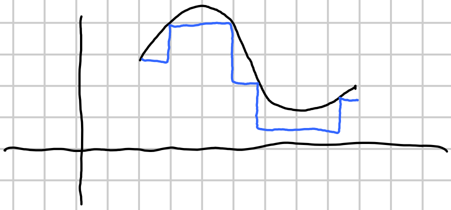
già definito nel caso (2)

$$I^+(f,[a,b]) = \inf\left\{ \int_a^b \varphi(x)\,dx \;,\ \text{con } \varphi \text{ elementare tale che } \varphi(x) \geq f(x)\ \forall x \in [a,b] \right\}$$

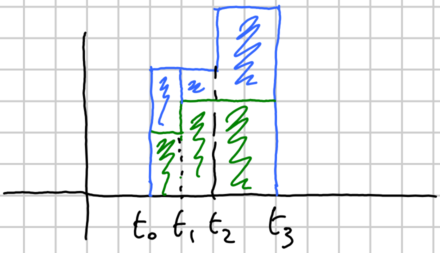
Cioè: approssimo f dall'alto con funzioni elementari, e prendo l'inf dei loro integrali (che sono aree di plurirettangoli).

Osserviamo che poiché f è limitata, $\exists M$ con $f(x) \leq M$ $\forall x \in [a,b]$, dunque $\varphi(x) = M$ è una funzione elementare sopra f, dunque sto prendendo l'inf di un insieme non vuoto.

$$I^-(f,[a,b]) = \sup\left\{ \int_a^b \varphi(x)\,dx,\ \ \varphi:[a,b]\to\mathbb{R} \text{ elementare},\ \varphi(x) \leq f(x)\ \forall x\in[a,b] \right\}$$



È facile vedere che, se $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ sono elementari e $\varphi(x) \leq \psi(x)$ $\forall x \in [a,b]$, allora $\int_a^b \varphi(x)\,dx \le \int_a^b \psi(x)\,dx$ (sono aree con segno di plurirettangoli; a meno di raffinare la suddivisione di $[a,b]$, possiamo trovarne una che "vede bene" sia per φ sia per ψ, e la tesi a quel punto è ovvia).



Perciò, se $\varphi \le f$ e $\psi \ge f$, φ, ψ sono elementari,

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx \le \int_a^b \psi(x)\,dx\,,$$

cioè, se

$$A = \left\{ \int_a^b \varphi(x)\,dx,\ \varphi \text{ elementare},\ \varphi \le f \right\}$$

$$B = \left\{ \int_a^b \psi(x)\,dx,\ \psi \text{ elementare},\ \psi \ge f \right\},$$

allora $\forall x \in A,\ y \in B$ si ha $x \le y$.

Dunque

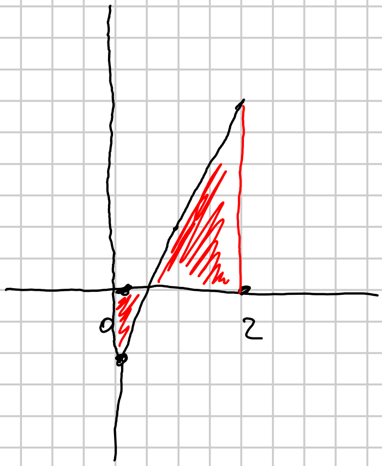
$$I^-(f,[a,b]) = \sup A \le \inf B = I^+(f,[a,b]).$$

cioè

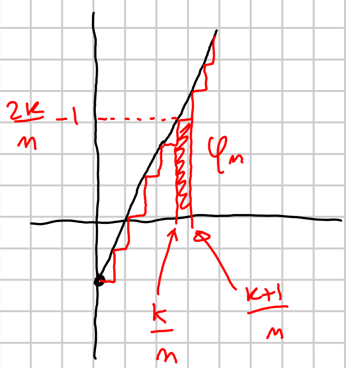
$$I^-(f,[a,b]) \le I^+(f,[a,b])$$

Definizione: Se $I^-(f,[a,b]) = I^+(f,[a,b])$, allora f si dice INTEGRABILE (secondo Riemann) e si pone $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = I^-(f,[a,b]) = I^+(f,[a,b])$.

Esempio: $\displaystyle\int_0^2 (2x-1)\,dx$.



Fisso n e divido $[0,2]$ in $2n$ intervalli di ampiezza $\frac{1}{n}$. Cerco φ_n e ψ_n elementari con $\varphi_n \le f \le \psi_n$



Quanto vale φ_n nell'intervallo $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$?

Poichè f è crescente e $\varphi_n \le f$ pongo $\varphi_n(x) = \varphi_n\left(\frac{k}{n}\right)$ $\forall x \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right)$,

cioè $\varphi_n(x) = 2\frac{k}{n} - 1$ $\quad \forall x \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right)$

Perciò $$\int_0^2 \varphi_n(x)\,dx = \sum_{k=0}^{2n-1} A\left(\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}, \frac{2k}{n} - 1\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{2n-1} \left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}\right)\cdot\left(\frac{2k}{n} - 1\right) = \sum_{k=0}^{2n-1} \boxed{\frac{1}{n}\left(\frac{2k}{n} - 1\right)} =$$

Area del k-esimo rettangolo

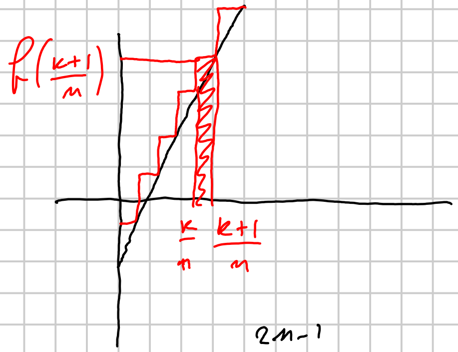
$$= \sum_{k=0}^{2n-1} \left(\frac{2k}{n^2} - \frac{1}{n}\right) = \frac{2}{n^2} \sum_{k=0}^{2n-1} k - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{2n-1} 1 =$$

$$= \frac{\cancel{2}}{n^2} \frac{(2n-1)(2n-1+1)}{\cancel{2}} - \frac{2n}{n} = \frac{2\cancel{n}(2n-1)}{n^{\cancel{2}}} - 2 =$$

$$= \frac{4n-2}{n} - 2 = 4 - \frac{2}{n} - 2 = 2 - \frac{2}{n}$$

Per determinare ψ_n ragiono in maniera identica, salvo che, per avere $\psi_n \geq f$, pongo

$$\psi_n(x) = f\left(\frac{k+1}{n}\right) \quad \forall\, x \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right)$$



Ottengo $\displaystyle\int_a^b \psi_n(x)\,dx = \sum_{k=0}^{2n-1} A\left(\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}, \frac{2(k+1)}{n} - 1\right) =$

$$= \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{2k}{n} - 1 + \frac{2}{n}\right) = \underbrace{\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{1}{n}\left(\frac{2k}{n} - 1\right)}_{\text{già calcolato}} + \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} =$$

$$= 2 - \frac{2}{n} + 2n \cdot \frac{2}{n^2} = 2 - \frac{2}{n} + \frac{4}{n} = 2 + \frac{2}{n}$$

Dunque, $\forall n \in \mathbb{N}_+$

$$I^-(f,[a,b]) \geq \int_a^b \varphi_n(x)\,dx = 2 - \frac{2}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}_+$$

$$\Longrightarrow I^-(f,[a,b]) \geq 2$$

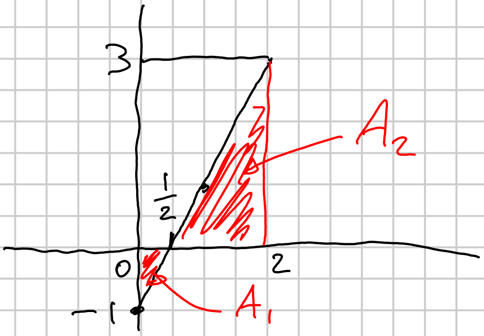
$$I^+(f,[a,b]) \leq \int_a^b \psi_n(x)\,dx = 2 + \frac{2}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}_+,$$

$$\Longrightarrow I^+(f,[a,b]) \leq 2$$

Dunque $\quad I^+(f,[a,b]) \leq 2 \leq I^-(f,[a,b])$.

Ma $\quad I^-(f,[a,b]) \leq I^+(f,[a,b])$ sempre, per cui $I^+ = I^- = 2$, e

$$\int_a^b (2x-1)\,dx = 2$$



$$A_2 = \frac{\frac{3}{2}\cdot 3}{2} = \frac{9}{4}$$

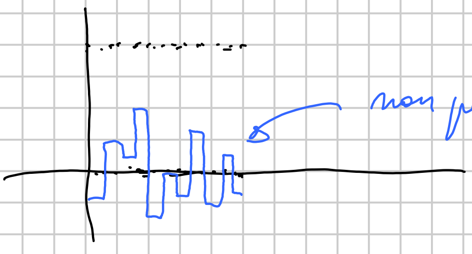
$$A_1 = \frac{\frac{1}{2}\cdot(-1)}{2} = -\frac{1}{4}$$

$$\int_0^2 (2x-1)\,dx = A_1 + A_2 = -\frac{1}{4} + \frac{9}{4} = 2$$

Conclusione: Calcolare gli integrali con la definizione è estremamente dispendioso. (E in realtà spesso sarebbe impossibile!)

Esempio: $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$.

Ora, se φ è elementare e $\varphi(x) \leq f(x)$ $\forall x \in [0,1]$, poiché φ è costante su intervalli e ogni intervallo non degenere contiene almeno un punto di $\mathbb{Q}$ per densità di $\mathbb{Q}$, abbiamo $\varphi(x) \leq 0$ $\forall x \in [0,1]$.



non può essere $\varphi \leq f$ perché in ogni intervallino trovo x con $f(x) = 0$

Dunque $\int_0^1 \varphi(x)\,dx \leq \int_0^1 0 \cdot dx = 0$

visto sopra: se $\varphi \leq \psi$ e φ, ψ sono elementari, $\int_a^b \varphi \leq \int_a^b \psi$

Dunque $\forall \varphi$ elementare con $\varphi \leq f$, $\int_0^1 \varphi(x)\,dx \leq 0$

$\Longrightarrow I^-(f, [0,1]) \leq 0$

Analogamente, se ψ è elementare e $\psi \geq f$, allora $\psi(x) \geq 1 \ \forall x \in [0,1]$ (perché $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ è denso), dunque $\int_0^1 \psi(x)\,dx \geq \int_0^1 1 \cdot dx = 1$, per cui

$I^+(f, [0,1]) \geq 1$

Dunque $I^+(f, [0,1]) > I^-(f, [0,1])$

e f NON è integrabile.

PROPRIETÀ ELEMENTARI

$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitate e integrabili.

NOTAZIONE: $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

Fatti: (1) $f+g$ è integrabile e

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

(2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \cdot f$ è integrabile e

$$\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$$

(3) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

(si vede prima per $a < c < b$, poi segue in generale dalle convenzioni sull'inversione degli estremi).

(4) $f \cdot g$ è integrabile, ma non c'è una formula per $\int_a^b f(x) g(x)\,dx$.

Tutti questi fatti si dimostrano prima per funzioni elementari, poi passando all'inf e al sup per calcolare I^+ e I^-.

INTEGRAZIONE DI FUNZIONI CONTINUE

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Def.: f è continua se è continua in ogni $x \in [a,b]$, cioè se $\forall x \in [a,b]$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ t.c. se $|y - x| < \delta$, allora $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$.

Def.: f è UNIFORMEMENTE continua se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tale che $\forall x, y \in [a,b]$, se $|x - y| < \delta$, allora $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$.

Nella prima definizione, δ dipende sia da ε sia da x, nella seconda solo da ε. Cioè, fissato ε trovo un δ che va bene $\forall x$.

Segue dalla definizione che uniformemente continua implica continua.

Esempio: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ è continua ma non uniformemente continua.

Teorema: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua è anche uniformemente continua. (Il punto è che il dominio è CHIUSO E LIMITATO).

Dim.: Per assurdo, supponiamo che f non sia uniformemente continua, cioè $\exists \varepsilon > 0$ tale che $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists x_n, y_n \in [a,b]$ con $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ ma $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$.

Poiché $[a,b]$ è un intervallo chiuso e limitato, esiste una sottosuccessione convergente x_{n_i} con $\lim_{i \to +\infty} x_{n_i} = \bar{x} \in [a,b]$. Poiché

$$x_{n_i} - \frac{1}{n_i} \leq y_{n_i} \leq x_{n_i} + \frac{1}{n_i},$$

per il Teorema dei carabinieri anche $\lim_{i \to +\infty} y_{n_i} = \bar{x}$. Dunque, poiché f è continua,

$\lim_{i\to+\infty} f(x_{n_i}) = f(\bar{x})$, $\lim_{i\to+\infty} f(y_{n_i}) = f(\bar{x})$,

per cui $\lim_{i\to+\infty} |f(y_{n_i}) - f(x_{n_i})| = |f(\bar{x}) - f(\bar{x})| = 0$,

che contraddice il fatto che

$$|f(y_{n_i}) - f(x_{n_i})| > \varepsilon \quad \forall i.$$

Teorema: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ CONTINUA. Allora

f è integrabile.

Dim.: So già che $I^+(f,[a,b]) \geq I^-(f,[a,b])$.
Voglio mostrare la disuguaglianza opposta.
Basta vedere che $\forall \varepsilon > 0$

$$I^+(f,[a,b]) - I^-(f,[a,b]) \leq \varepsilon$$

Fissato ε, per il Teorema precedente posso assumere f uniformemente continua, per cui $\exists\, \delta > 0$ tale che se $|x-y| \leq \delta$, allora $|f(x) - f(y)| \leq \dfrac{\varepsilon}{b-a}$.

Sia n tale che $\dfrac{b-a}{n} \leq \delta$ (cioè se divido $[a,b]$ in n intervalli uguali di ampiezza $\dfrac{b-a}{n}$, la loro ampiezza è $\leq \delta$). Sia I_k il k-esimo intervallo della suddivisione,

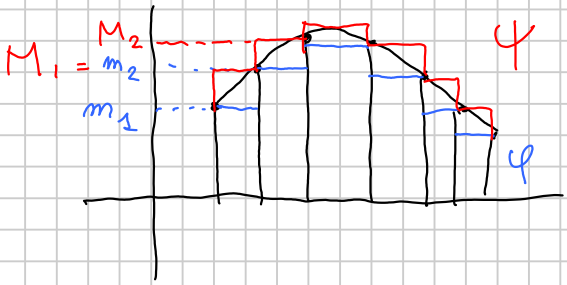
$$I_k = \left[a + \frac{k(b-a)}{n},\ a + \frac{(k+1)(b-a)}{n}\right], \text{ e}$$

siano $$m_k = \min\{f(x),\ x \in I_k\},$$
$$M_k = \max\{f(x),\ x \in I_k\},$$
che esistono per il Teorema di Weierstrass.

Inoltre, $\forall k$, poiché I_k ha ampiezza $\leq \delta$,
$$0 \leq M_k - m_k \leq \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Ora poniamo $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ la funzione elementare con $\varphi(x) = m_k \quad \forall x \in I_k$,

$\psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ la funzione elementare con $\psi(x) = M_k \quad \forall x \in I_k$.



Per definizione di $I^+ = I^+(f,[a,b])$ e $I^- = I^-(f,[a,b])$
$$\int_a^b \varphi(x)\,dx \leq I^- \leq I^+ \leq \int_a^b \psi(x)\,dx$$

e per costruzione $\psi - \varphi$ è una funzione elementare tale che
$$\psi(x) - \varphi(x) = M_k - m_k \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \quad \forall x \in I_k,$$
per cui
$$\psi(x) - \varphi(x) \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \quad \forall x \in [a,b].$$

Dunque $$I^+ - I^- \leq \int_a^b \psi(x)\,dx - \int_a^b \varphi(x)\,dx =$$

$$= \int_a^b (\psi(x)-\varphi(x))\,dx \le \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\,dx = A\left(a,b,\frac{\varepsilon}{b-a}\right) =$$

$$= (b-a)\cdot\frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon \text{, da cui la tesi}$$

Esercizi sulle serie.

① Calcolare i valori delle seguenti serie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^n}{3^n}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \log\left(1-\frac{1}{n^2}\right), \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}.$$

La prima è una serie geometrica di ragione $a = \left(-\frac{2}{3}\right)^n$, la cui somma parziale è

$$S_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} = \frac{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)},$$ il cui limite (poiché $\left|\left(-\frac{2}{3}\right)\right| < 1$, per cui $\left(-\frac{2}{3}\right)^n \to 0$) è uguale a

$$\frac{1}{1-a} = \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{3}{5}.$$

$\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$. Poiché $1-\frac{1}{n^2} < 1$, la serie è a termini negativi. Potremmo cambiarle il segno, confrontarla con $\sum \frac{1}{n^2}$ e scoprire che converge.

Però questo non dice nulla sul valore a cui converge.

Poiché non sembra una serie geometrica né una serie di potenze, l'unica speranza è che sia telescopica.

$$\log\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \log\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) = \log\frac{(n-1)(n+1)}{n^2} =$$

$$= \log(n-1) + \log(n+1) - 2\log n \qquad (n \geq 2)$$

$$a_2 = \overset{=0}{\log 1} + \log 3 - 2\log 2$$

$$a_3 = \log 2 + \log 4 - 2\log 3$$

$$a_4 = \log 3 + \log 5 - 2\log 4$$

$$a_5 = \log 4 + \log 6 - 2\log 5$$

$$a_6 = \log 5 + \log 7 - 2\log 6$$

Viste le cancellazioni, mi rendo conto che

$$S_n = a_2 + a_3 + \dots + a_n = \log 1 - \log 2 + \log(n+1) - \log n$$

Si può mostrare che ciò è vero per induzione su $n \geq 2$.

Per $n=2$, $S_2 = a_2 = \log 1 - \log 2 + \log(2+1) - \log 2 =$

$$= \log 1 + \log 3 - 2\log 2: \quad \text{OK}$$

Se $S_n = \log 1 - \log 2 + \log(n+1) - \log n$,

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} = \overbrace{\log 1 - \log 2 + \log(n+1) - \log n}^{S_n \text{ per ipotesi induttiva}} +$$

$$+ \underbrace{\log((n+1)-1) + \log((n+1)+1) - 2\log(n+1)}_{a_{n+1}} =$$

$$= \log 1 - \log 2 + \log(n+1) - \cancel{\log n} + \cancel{\log n} + \log(n+2) - 2\log(n+1) =$$

$$= \log 1 - \log 2 - \log(n+1) + \log(n+2)$$, che è la tesi

induttiva. Dunque

$$S_n = \cancel{\log 1}^{0} - \log 2 + \log(n+1) - \log n =$$

$$= -\log 2 + \log \frac{n+1}{n}$$ → tende a 0 per $n \to +\infty$

Dunque $\sum_{n\geq 2} \log\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to+\infty} s_n = -\log 2$.

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}$. Riconosco che è una serie di potenze: si ottiene ponendo $x = \frac{1}{2}$ in

$$\sum_{n=0}^{\infty} n x^n = x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1}.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{derivata}}}{D}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right).$$

Ora $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ ha raggio di convergenza 1, e $\forall x \in (-1,1)$ vale $\frac{1}{1-x}$. Inoltre, per quanto visto la volta scorsa, $\sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} = D\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)$ ha lo stesso raggio di convergenza e vale $\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$ $\forall x \in (-1,1)$.

In definitiva, $\forall x \in (-1,1)$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} n x^n = x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} = x \cdot \frac{1}{(1-x)^2},$$ per cui, se $x = \frac{1}{2}$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 2$$ ← risultato finale.