Scopo di oggi: legare integrazione e derivazione.

(Ricordo che nella definizione di integrale NON compaiono derivate!)

Teorema (della media integrale): Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Allora $\exists\, c \in [a,b]$ tale che

$$\underbrace{\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx}_{\text{è la "media" di } f \text{ su } [a,b]} = f(c).$$

Dim.: Per Weierstrass, f assume minimo assoluto m e massimo assoluto M su $[a,b]$.

Perciò, $\varphi(x) = m$, $\psi(x) = M$ sono funzioni elementari che stanno rispettivamente sotto e sopra ad f. Dunque:

$$m(b-a) = \int_a^b \varphi(x)\,dx \leq I^-(f,[a,b]) = \int_a^b f(x)\,dx =$$

$$= I^+(f,[a,b]) \leq \int_a^b \psi(x)\,dx = M(b-a),$$

cioè

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

da cui, dividendo per $b-a>0$,

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M$$

Per il Teorema dei valori intermedi, poiché f è continua, $\forall K$ tale che $m \leq K \leq M$, $\exists\, c \in [a,b]$ con $f(c)=K$. Applicando questo teorema a $K = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$, $\exists\, c \in [a,b]$ con $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.

$\square$

Definizione: Sia I un intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$. Una **PRIMITIVA** di f è una funzione $F: I \to \mathbb{R}$ derivabile tale che $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in I$.

Domanda: Data f, ne esiste sempre una primitiva? È unica?

Cominciamo dall'unicità:

Teorema: Sia $F: I \to \mathbb{R}$ una primitiva di $f: I \to \mathbb{R}$. Allora, ogni altra primitiva di f è ottenuta sommando una costante ad F, cioè tutte e sole le primitive di f sono le funzioni della forma $G(x) = F(x) + c$, c costante.

Dim.: Se F è una primitiva di f e $G(x) = F(x) + c$, allora $G'(x) = (F+c)'(x) = F'(x) = f(x)$, in quanto la derivata di una costante è nulla, dunque anche G è una primitiva di f.
Inoltre, se G è una primitiva di F e poniamo $H(x) = G(x) - F(x)$, allora
$H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad \forall x \in I$,
per cui $H(x) = c \quad \forall x \in I$ (il fatto che una funzione a derivata nulla sia costante non è banale; l'abbiamo già visto, usando Lagrange). Dunque $G(x) = F(x) + H(x) = F(x) + c$, come voluto.

$\square$

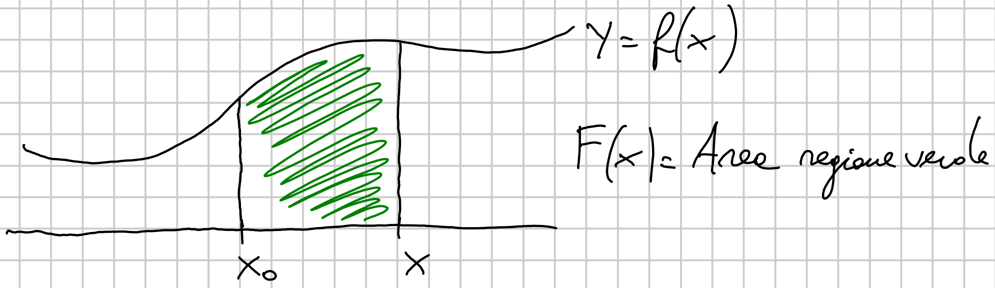
L'esistenza di una primitiva è il teorema principale di oggi:

Teorema (fondamentale del Calcolo Integrale):
Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$, $f: I \to \mathbb{R}$ CONTINUA.
Scelto $x_0 \in I$, poniamo

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \qquad \forall x \in I.$$

($F: I \to \mathbb{R}$ è ben definita perché continua $\Rightarrow$ integrabile).

Allora F è una primitiva di f.



Dim.: Devo vedere che $F'(x_1) = f(x_1)$ $\forall x_1 \in I$.

Calcolo il rapporto incrementale

$$\frac{F(x_1+h)-F(x_1)}{h} = \frac{\int_{x_0}^{x_1+h} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{x_1} f(t)\,dt}{h} =$$

$$= \frac{\cancel{\int_{x_0}^{x_1} f(t)\,dt} + \int_{x_1}^{x_1+h} f(t)\,dt \cancel{- \int_{x_0}^{x_1} f(t)\,dt}}{h} =$$

$$= \frac{1}{h}\int_{x_1}^{x_1+h} f(t)\,dt = \frac{1}{(x_1+h)-x_1}\int_{x_1}^{x_1+h} f(t)\,dt$$

Per il Teorema della media integrale, perciò, $\forall h>0$ $\exists\, c_h$ con $x_1 \le c_h \le x_1+h$ tale che

$$\frac{F(x_1+h)-F(x_1)}{h} = f(c_h).$$

Poiché $x_1 \le c_h \le x_1+h$, $\lim_{h\to 0} c_h = x_1$ (Teorema dei carabinieri)

per cui

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x_1+h)-F(x_1)}{h} = \lim_{h\to 0} f(c_h) = f(x_1)$$

perché f è continua

Perciò F è derivabile in x_1 e $F'(x_1)=f(x_1)$, $\forall x_1 \in I$.

$\square$

Nel Teorema, abbiamo usato l'integrale di Riemann per costruire una primitiva di f. Nella pratica, di solito si fa il viceversa: si cerca una primitiva di f per calcolarne l'integrale di Riemann.

Corollario: Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua, e sia F una qualsiasi primitiva di f. Allora

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) = \Big[F(x)\Big]_a^b$$

NOTAZIONE UTILE

Dim.: Se F e G sono due primitive di f, allora $\exists c\in\mathbb{R}$ tale che $F(x)=G(x)+c$ $\forall x\in[a,b]$, per cui $F(b)-F(a)=(G(b)+c)-(G(a)+c)=G(b)-G(a)$, e primitive diverse danno lo stesso risultato.
Perciò, per il Teorema Fondamentale del Calcolo Int., posso scegliere $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, che dà

$$F(b)-F(a)=\int_a^b f(t)\,dt-\underbrace{\int_a^a f(t)\,dt}_{=0}=\int_a^b f(t)\,dt.$$

$\square$

Esempi di primitive:

① $f(x)=x^n$, $\quad F(x)=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ $\quad \forall n\in\mathbb{Z},\ n\neq -1.$

(in quanto $\left(x^{n+1}\right)'=(n+1)x^n$).

Ad esempio, $\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1^3}{3}-\frac{0^3}{3}=\frac{1}{3}$

② $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=\dfrac{1}{x}$ ha come primitiva

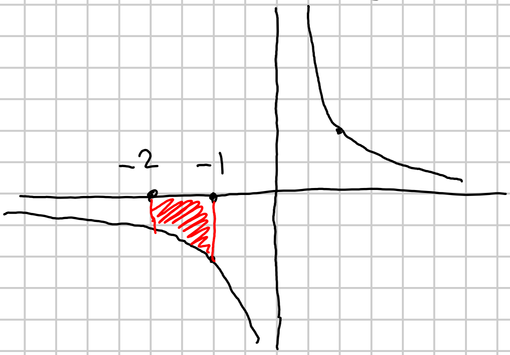
$$F(x)=\log x$$

$f:(-\infty,0)\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=\dfrac{1}{x}$ ha come primitiva

$$F(x)=\log|x|=\log(-x).$$

Infatti, se $x<0$, $\left(\log(-x)\right)'=(-1)\cdot\left(\dfrac{1}{-x}\right)=\dfrac{1}{x}$.

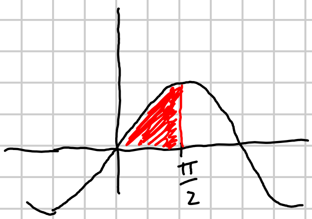
$$\int_{-2}^{-1}\frac{1}{x}=\left[\log(-x)\right]_{-2}^{-1}=\log 1-\log 2=-\log 2<0$$



③ $f(x)=\sin x$, $\quad F(x)=-\cos x$

$f(x)=\cos x$, $\quad F(x)=\sin x$

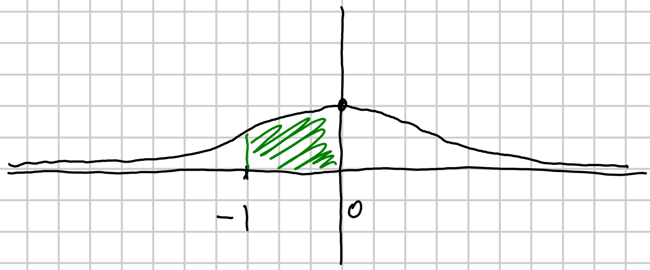
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=-\cos\frac{\pi}{2}+\cos 0=-0+1=1$$



4) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $F(x) = \arctan x$

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \left[\arctan x\right]_{-1}^{0} = \arctan 0 - \arctan(-1)$$

$$= 0 - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$$



Osservazioni: 1) Se $F' = f$, $G' = g$, allora $(F+G)' = f+g$, per cui una primitiva della somma è data da una somma di primitive, e $(aF)' = af$, per cui aF è una primitiva di af.

2) Se $F' = f$, e $g(x) = f(a \cdot x)$, a costante, $a \neq 0$, allora una primitiva di g è $G(x) = \frac{1}{a} F(ax)$ in quanto $G'(x) = \frac{1}{a} \cdot a \cdot F'(ax) = f(ax) = g(x)$.

Ad esempio, se $f(x) = \sin 3x$, allora

$$F(x) = \frac{1}{3}\left(-\cos 3x\right)$$

(infatti $F'(x) = \frac{1}{3} \cdot (3 \sin 3x) = \sin 3x$).

Altro esempio: Se $f(x) = e^x$, $F(x) = e^x$.

Altri esempi elementari

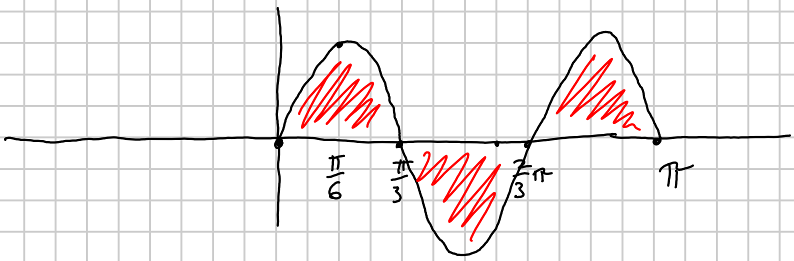
$$\int_0^1 (e^{2x}-e^x)\,dx = \int_0^1 e^{2x}\,dx - \int_0^1 e^x\,dx =$$

$$= \left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 - \left[e^x\right]_0^1 = \frac{e^2-e^0}{2} - (e^1-e^0) =$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} - e + 1 = \frac{e^2}{2} - e + \frac{1}{2}$$

$$\int_0^\pi \sin 3x\,dx = \left[\frac{-\cos 3x}{3}\right]_0^\pi = \frac{-\cos 3\pi + \cos 0}{3} =$$

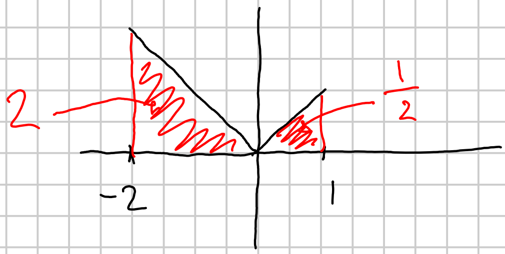
$$= \frac{1+1}{3} = \frac{2}{3}$$



$$\int_{-2}^1 |x|\,dx = \int_{-2}^0 |x|\,dx + \int_0^1 |x|\,dx = \int_{-2}^0 (-x)\,dx + \int_0^1 x\,dx =$$

$$= \left[-\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^0 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \left(0-\left(-\frac{4}{2}\right)\right) + \left(\frac{1}{2}-0\right) =$$

$$= 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$



Esercizio: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x|$ è continua, per cui ha una primitiva $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. La so[i] riesco descrivere con una formula?

Esercizi sulle serie.

① Discutere convergenza e assoluta convergenza di

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log n}{n}.$$

Convergenza assoluta: poiché $\left|(-1)^n \frac{\log n}{n}\right| = \frac{\log n}{n}$ per $n \geq 1$, devo studiare $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n}$. Definitivamente (per $n \geq 3$) $\log n \geq 1$, per cui $\frac{\log n}{n} \geq \frac{1}{n}$, perciò poiché $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$, anche $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n}$ diverge, e la serie data NON converge assolutamente.

Per la convergenza semplice, osservo che è una serie a segni alterni, per cui provo ad applicare Leibniz. Per avere convergenza, devo mostrare

① $\lim_{n \to +\infty} \frac{\log n}{n} = 0$: OK, perché potenza batte logaritmo

② $\frac{\log(n+1)}{n+1} \leq \frac{\log n}{n}$ almeno definitivamente.

1° modo (algebrico): $\frac{\log(n+1)}{n+1} \leq \frac{\log n}{n} \iff$

$n \log(n+1) \leq (n+1) \log n \iff \log(n+1)^n \leq \log n^{n+1}$

$\iff$ (poiché log è crescente) $(n+1)^n \leq n^{n+1}$

$\Longleftrightarrow (n+1)^n \leq n^n \cdot n \Longleftrightarrow \dfrac{(n+1)^n}{n^n} \leq n \Longleftrightarrow$

$\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n \leq n \Longleftrightarrow \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \leq n.$

Ma abbiamo dimostrato a lezione che $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 3 \ \forall n$,

dunque $\dfrac{\log(n+1)}{n+1} \leq \dfrac{\log n}{n} \quad \forall n \geq 3$

2° modo (analitico): Pongo $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$, e

ne studio la monotonia con la derivata.

$f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \cdot x - \log x}{x^2} = \dfrac{1-\log x}{x^2}$, che è $<0 \ \forall x > e$

Dunque f è decrescente in $[e, +\infty)$ e in particolare

$f(n+1) \leq f(n) \quad \forall n \geq 3$, cioè $\dfrac{\log(n+1)}{n+1} \leq \dfrac{\log n}{n} \quad \forall n \geq 3.$

Dunque la serie data CONVERGE.

(2) Si discuta al variare di $a>0$, la convergenza

di $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1-\cos\frac{1}{n^a}\right).$

$-1 \leq \cos\dfrac{1}{n^a} \leq 1$, per cui la serie è a termini non

negativi e posso usare i teoremi di confronto.

Condizione necessaria: Poiché $a>0$, $\dfrac{1}{n^a} \to 0$, per

cui $1-\cos\dfrac{1}{n^a} \to 1-\cos(0) = 1-1=0$, per cui

la serie può convergere.

Poiché $\frac{1}{n^a} \to 0$, $\cos\frac{1}{n^a} = 1 - \frac{\left(\frac{1}{n^a}\right)^2}{2} + o\left(\left(\frac{1}{n^a}\right)^3\right)$

per cui $1-\cos\frac{1}{n^a} = \frac{1}{n^{2a}\cdot 2}$ e meno di termini più piccoli.

Dunque $\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\cos\frac{1}{n^a}}{\frac{1}{2n^{2a}}} = 1$ (si può dimostrare anche con il cambio di variabile $x=\frac{1}{n^a}$)

Perciò la serie ha lo stesso comportamento di

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{2a}}$, che converge $\iff 2a>1$.

Dunque la serie data converge per $a>\frac{1}{2}$

e diverge per $a\leq\frac{1}{2}$.

③ Per quali $x\in\mathbb{R}$ converge $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^n+5^n}x^n$?

È una serie di potenze, per cui calcolo il raggio di convergenza.

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n}{2^n+5^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{3^n}}{\sqrt[n]{5^n\left(1+\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{5\sqrt[n]{1+\left(\frac{2}{5}\right)^n}} = \frac{3}{5}$$

Dunque il raggio di convergenza è $R = \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}$

perciò la serie converge per $-\frac{5}{3} < x < \frac{5}{3}$,

e non converge per $x > \frac{5}{3}$ e per $x < -\frac{5}{3}$.

Rimangono da analizzare i casi $x = \frac{5}{3}$ e $x = -\frac{5}{3}$.

Se $x = \frac{5}{3}$, $\frac{3^n}{2^n+5^n} x^n = \frac{\cancel{3^n}}{\cancel{5^n}\left(1+\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)} \cdot \cancel{\left(\frac{5}{3}\right)^n} =$

$= \frac{1}{1+\left(\frac{2}{5}\right)^n}$, che tende a 1 per $n \to +\infty$

Dunque la condizione necessaria è violata, e la serie non converge.

Se $x = -\frac{5}{3}$, $\frac{3^n}{2^n+5^n} x^n = (-1)^n \frac{1}{1+\left(\frac{2}{5}\right)^n}$, che non tende a 0 (ad esempio tende a 1 sulla sottosuccessione degli n pari). Dunque la serie data non converge nemmeno per $x = -\frac{5}{3}$.

3) Discutere la convergenza di $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3+1}{n^4+1}$.

È una serie a segni alterni, per cui provo Leibniz.

$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3+1}{n^4+1} = 0$, OK.

cioè $\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n^3+1}{n^4+1}}{\frac{1}{n}} = 1$

$\frac{n^3+1}{n^4+1} \sim \frac{1}{n}$, che è decrescente, ma

QUESTO NON IMPLICA CHE $\frac{n^3+1}{n^4+1}$ SIA DEFINITIVAMENTE DECRESCENTE!

In generale, mai applicare il confronto a serie con termini di segno variabile!

2 modi per concludere, evitando la disuguaglianza

$$\frac{(n+1)^3+1}{(n+1)^4+1} \le \frac{n^3+1}{n^4+1}.$$

1° modo: $f(x)=\frac{x^3+1}{x^4+1}$,

$$f'(x)=\frac{3x^2(x^4+1)-(x^3+1)\cdot 4x^3}{(x^4+1)^2} = \frac{-x^6+\text{termini più piccoli}}{(x^4+1)^2},$$

per cui $f'(x)<0$ definitivamente.

2° modo (vedi Gobbino):

termine "asintoticamente equivalente" più semplice

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n^3+1}{n^4+1}\right) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}}_{\text{converge per Leibniz}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n^3+1}{n^4+1}-\frac{1}{n}\right)}_{\text{converge assolutamente (via fatto!)}}$$

Dunque la serie data converge.