Lezione 13 marzo

Titolo nota 13/03/2020

Teorema (Monotonia 3): $f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo, derivabile con $f'(x) > 0$ per tutti gli x eccetto al più un numero finito di x.
Allora f è strettamente crescente.
Vale il medesimo enunciato con $f'(x) < 0$ e strettamente decrescente.

Dim.: Dati $a, b \in I$ con $a < b$,
$\exists$ numero finito $x_1, \dots, x_k$ di punti tra a e b tali che $f'(x) > 0$ $\forall x \neq x_i$.
Supponiamo $a \leq x_1 < \dots < x_k \leq b$.
Allora $f(a) \leq f(x_1) < f(x_2) \dots < f(x_k) \leq f(b)$
(per Monotonia 2), per cui $f(a) < f(b)$.

Esercizio: Dato $\lambda \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lambda x + \sin x$. Per quali valori di λ f è strettamente crescente?

Svolgimento: f è chiaramente derivabile e
$f'(x) = \lambda + \cos x$ $\forall x \in \mathbb{R}$.
Poiché $-1 \leq \cos x \leq 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$, se $\lambda > 1$
$f'(x) = \lambda + \cos x \geq \lambda - 1 > 0$ $\forall x$, e

f è strettamente crescente (Monotonia 2).

Se $\lambda = 1$, $f'(x) = 1 + \cos x$, per cui

$f'(x) = 0 \iff \cos x = -1 \iff x = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$,

e $f'(x) > 0$ altrimenti.

Pertanto, se $a < b$, abbiamo $f'(x) > 0$ $\forall x \in [a, b]$ eccetto un numero finito di valori (tutti i numeri della forma $\pi + 2k\pi$ che cadono in $[a,b]$). Dunque Monotonia 3 $\Longrightarrow$ f è strettamente crescente.

Se $\lambda < 1$, $f'(x) = \lambda + \cos x$ e

$f'(\pi) = \lambda - 1 < 0$, per cui f NON è crescente vicino a π (basta Monotonia 1).

Riassumendo: f è strettamente crescente $\iff \lambda \geq 1$.

Teoremi di L'Hospital.

Teorema: Siano $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$, e sia $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ un punto di accumulazione di I (cioè $x_0 \in \overline{I}$ se I è limitato, o $x_0 = \pm\infty$ e in tal caso I è illimitato a destra o a sinistra). Supponiamo f, g derivabili in $I \setminus \{x_0\}$
$g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ in un intorno U di x_0 (intersecato I), eccetto al massimo in x_0.

Supponiamo che $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ sia della forma

$\frac{\infty}{\infty}$ o $\frac{0}{0}$. Allora,

se $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, allora anche $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$.

Dim.: Solo il caso $x_0 \in \mathbb{R}$, e la forma indeterminata sia $\frac{0}{0}$. Si fanno separatamente i limiti a x_0^+ e x_0^-. L'argomento è identico, facciamo solo x_0^+. Le nostre ipotesi ci dicono che $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (x_0, x_0+\delta)$ per qualche $\delta > 0$.

Poiché la forma indeterminata è $\frac{0}{0}$,

ho $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} g(x) = 0$, per cui posso

definire $f(x_0) = g(x_0) = 0$ prolungando

$f, g : (x_0, x_0+\delta) \to \mathbb{R}$ a funzioni continue

$f, g : [x_0, x_0+\delta] \to \mathbb{R}$.

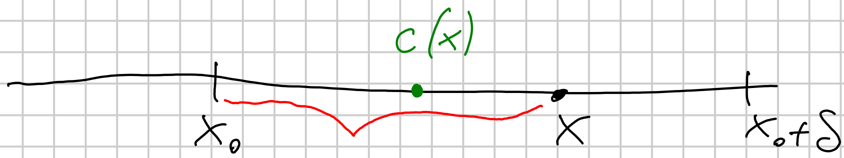
(f, g sono derivabili, dunque continue, in $(x_0, x_0+\delta]$, e le posso prolungare in maniera continua in x_0 poiché hanno limite 0).

Perciò, $f, g : [x_0, x_0+\delta] \to \mathbb{R}$ verificano le ipotesi del Teorema di Cauchy. Pertanto, $\forall x \in (x_0, x_0+\delta)$ applico Cauchy nell'intervallo

$[x_0, x]$ e ottengo

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - \overset{=0}{f(x_0)}}{g(x) - \underset{=0}{g(x_0)}} \overset{\text{Cauchy}}{=\!=} \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))},$$

dove $c(x)$ è un certo numero con $x_0 < c(x) < x$.



Ora, se $x \to x_0$, da $x_0 < c(x) < x$ otteniamo che anche $c(x) \to x_0$.

Dunque

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} = \lim_{y \to x_0} \frac{f'(y)}{g'(y)},$$

che è la tesi.

Esempio: ① $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{\cos x}{x^2}$. Applicando l'Hospital,

ottengo $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{-\overset{\to 1}{\sin x}}{2x} = -\frac{1}{2}$. QUESTO CALCOLO È ERRATO!

In effetti, $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{\cos x}{x^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$.

L'Hospital si applica solo a forme tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$.

(2) $\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)$ è una forma $\infty \cdot 0$, che possiamo ricondurre a $\frac{0}{0}$ osservando che $x = \frac{1}{\frac{1}{x}}$. Dunque

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}} =$$

$$\overset{L'H.}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1.$$

(3) $\lim_{x\to 1^-} \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}}$. È una forma $\frac{0}{0}$

arccos non è derivabile in 1, ma questo non è un problema. Applico L'Hopital, e ottengo

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{-\frac{1}{2}(1-x)^{\frac{1}{2}-1}} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x}}} =$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{2\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x\to 1^-} \frac{2}{\sqrt{1+x}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

(4) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x} - 1 - 3x}{e^{x^2} - \cos x}$. È della forma $\frac{0}{0}$.

L'Hopital $\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{3 \cdot e^{3x} - 3}{2x e^{x^2} + \sin x}$ Ancora $\frac{0}{0}$

L'Hopital $\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{9 e^{3x}}{2\left(\underbrace{e^{x^2}}_{\to 1} + \underbrace{x \cdot (2x) e^{x^2}}_{\to 0}\right) + \underbrace{\cos x}_{\to 1}} = \frac{9}{2+1} =$

$= 3$

FUNZIONI TRIGONOMETRICHE IPERBOLICHE

Seno iperbolico: sinh
Coseno iperbolico: cosh
Tangente iperbolica: tanh

Sono funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ così definite:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

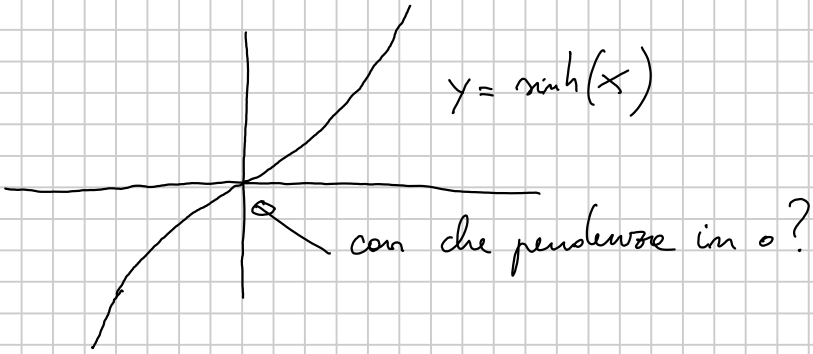
Fatti: ① $\sinh(-x) = \dfrac{e^{-x} - e^x}{2} = -\sinh(x)$, per cui sinh è DISPARI.
(In particolare $\sinh(0) = 0$).

② cosh è PARI, ed è sempre > 0, per cui tanh è definita su tutto $\mathbb{R}$.

③ $$\sinh'(x) = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$$

$$\cosh'(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x)$$

④ Da ③ segue che $\sinh(x)$ è strettamente crescente in quanto ha derivata sempre positiva.
Inoltre, $$\lim_{x \to +\infty} \sinh(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{+\infty - 0}{2} = +\infty$$

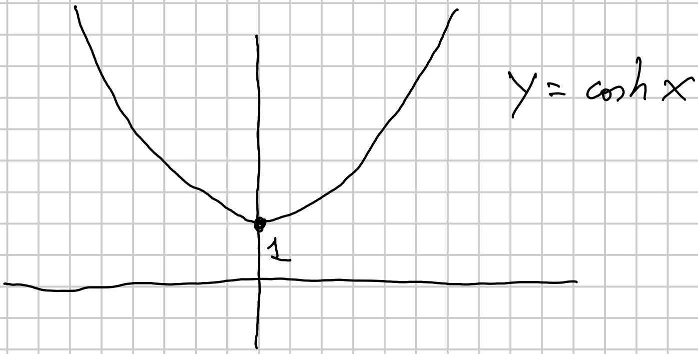


$\sinh'(0) = \cosh(0) = 1$, la tangente in 0 è la bisettrice del I e III quadrante.

(5) $\cosh'(x) = \sinh(x)$ è positivo se $x > 0$
negativo se $x < 0$.

Perciò, cosh è DECRESCENTE su $(-\infty, 0]$, CRESCENTE su $[0, +\infty)$. Dunque ha minimo assoluto in 0, dove $\cosh(0) = \frac{e^0 + e^{-0}}{2} = 1$

$$\lim_{x \to +\infty} \cosh(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{+\infty + 0}{2} = +\infty.$$



(6) $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$ è dispari e vale 0 in 0.

$$\lim_{x \to +\infty} \tanh(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{e^x}(1 - \overbrace{e^{-2x}}^{\to 0})}{\cancel{e^x}(1 + \underbrace{e^{-2x}}_{\to 0})}$$

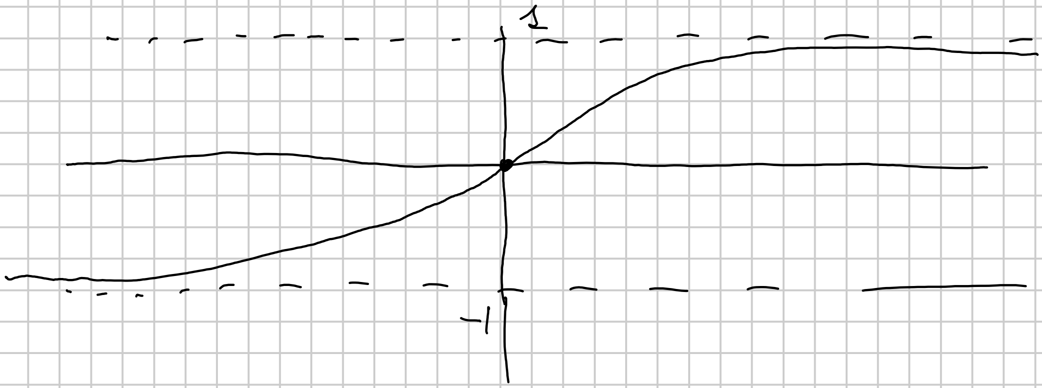
$$= 1.$$

$$\tanh' = \left(\frac{\sinh}{\cosh} \right)' = \frac{\sinh' \cosh - \sinh \cosh'}{\cosh^2} =$$

$$= \frac{\cosh^2 - \sinh^2}{\cosh^2} = \frac{1}{\cosh^2} > 0$$

vedi sotto

Perciò tanh è strettamente crescente



(7) Nel punto (6) abbiamo usato la

RELAZIONE FONDAMENTALE

DELLA TRIGONOMETRIA IPERBOLICA:

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Infatti, $\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 =$

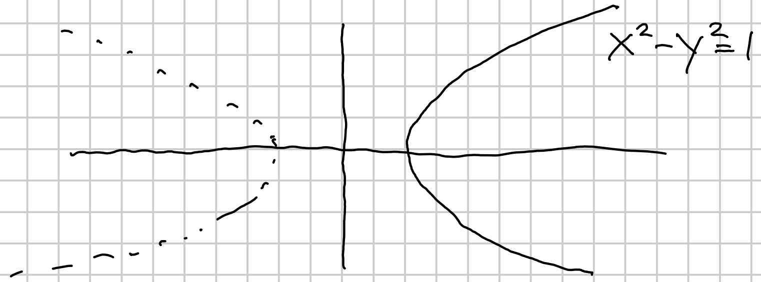
$$= \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4} - \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

(8) La funzione $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$ parametrizza la circonferenza unitaria, in quanto $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$.

$\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\quad \psi(t) = (\cosh t, \sinh t)$

è tale per cui il punto $\psi(t)$ di coordinate $x(t) = \cosh t$, $\quad y(t) = \sinh(t)$ verifica

$x(t)^2 - y(t)^2 = 1$, e perciò giace sul ramo destro di un' iperbole.



Da qui il nome "iperbolico".

9 Valgono formule di somma, sottrazione, duplicazione analoghe (ma non identiche!) a quelle classiche.

$\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$.

Infatti, $\sinh(x+y) = \dfrac{e^{x+y}-e^{-x-y}}{2}$,

$\sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y) =$

$$\frac{e^x-e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y+e^{-y}}{2} + \frac{e^x+e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y-e^{-y}}{2} =$$

$$= \frac{e^{x+y}\cancel{-e^{-x+y}}\cancel{+e^{x-y}}-e^{-x-y}}{4} + \frac{e^{x+y}\cancel{+e^{-x+y}}\cancel{-e^{x-y}}+e^{-x-y}}{4} =$$

$$= \frac{e^{x+y}-e^{-x-y}}{2}.$$

10 $\sinh x$ è una funzione continua strettamente crescente su tutto $\mathbb{R}$, e surgettiva in quanto $\lim_{x\to+\infty}\sinh(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty}\sinh(x) = -\infty$.

Dunque ammette inversa continua

$\operatorname{arcsinh}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

La si può descrivere con una formula.

Se $y = \sinh(x) = \dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$, devo esplicitare x in funzione di y.

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \iff 2y = e^x - e^{-x} \iff$$

(moltiplico per $e^x \neq 0$) $\quad 2ye^x = e^{2x} - 1 \iff$

$e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$. Se chiamo $z = e^x$,

$z^2 - 2yz - 1 = 0$, da cui

$z = y \pm \sqrt{y^2+1}$. Poiché $z = e^x > 0$, deve

essere $z = y + \sqrt{y^2+1}$, cioè

$e^x = y + \sqrt{1+y^2}$, da cui $x = \log\left(y + \sqrt{1+y^2}\right)$.

Dunque $\operatorname{arcsinh}(x) = \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.

Teorema: $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile, I intervallo.

Allora $f'(x) = 0 \ \forall x \in I \iff f$ è costante.

Dim.: $\Longleftarrow$ OVVIA (già vista): i rapporti incrementali di una funzione costante sono tutti nulli.

$\Longrightarrow$ Non è ovvio. Si usa Lagrange.

Basta vedere che $\forall a, b \in I$, si ha $f(a) = f(b)$.

Applico Lagrange alla restrizione di f a $[a,b]$, e ottengo

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \quad \text{per qualche } c \in (a,b).$$

Poiché $f'(x)=0 \ \forall x \in I$ si ha $f'(c)=0$

per cui $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0 \Rightarrow f(b)-f(a)=0,$

cioè $f(a)=f(b)$.

Ex.: Mostrare che $\forall x>0$ si ha

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

Dim.: Sia $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x)=\arctan x + \arctan \frac{1}{x}$.

Allora $f'(x)= \frac{1}{1+x^2} + \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} =$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$$

Per quanto appena visto, f è costante, cioè

$\exists \alpha$ tale che $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \alpha \quad \forall x \in (0,+\infty)$

Per calcolare α, posso osservare che

$f(1)= \arctan 1 + \arctan 1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, o che

$$\alpha = \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \underbrace{\arctan x}_{\downarrow \, \frac{\pi}{2}} + \underbrace{\arctan \frac{1}{x}}_{\downarrow \, 0} = \frac{\pi}{2}.$$

---

arcsinh $=$ settsinh .