Correzione di 2 esercizi del foglio.

Ex. 8: Concludere la dimostrazione del fatto che, se $X$ è connesso per archi e $x_0 \in X$, allora

$$[S^1, X] \cong \pi_1(X, x_0)/\text{coniugio}$$

ATTENZIONE: questi due oggetti NON sono gruppi!

Dunque $\cong$ significa che c'è una bigezione (non ha senso pensare a isomorfismi di gruppi).

In aula era stato costruito e discusso una ben definita mappa

$$\pi_1(X, x_0)/\text{coniugio} \longrightarrow [S^1, X]$$

indotta da

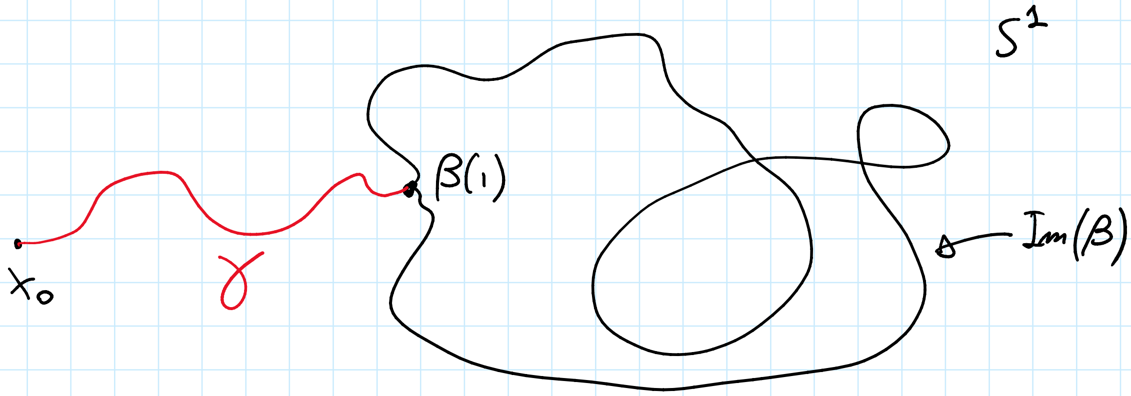
$$\alpha \longmapsto \hat{\alpha}$$

dove, se $\alpha : [0,1] \to X$, si ha $\hat{\alpha}(e^{2\pi i t}) = \alpha(t)$.

Cerchiamo di concludere la discussione della mappa inversa

$$\Phi : [S^1, X] \to \frac{\pi_1(X, x_0)}{\text{coniugio}}.$$

Dato $\beta : S^1 \to X$, si sceglie arbitrariamente $\gamma : [0,1] \to X$ continua con $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = \beta(\underset{S^1}{1})$




Posto $\alpha : [0,1] \to X$, $\alpha(t) = \beta(e^{2\pi i t})$, abbiamo posto

$$\Phi([\beta]) = [\gamma * \alpha * \gamma^{-1}]$$

($\alpha$ è l'unico cammino tale che $\beta = \hat{\alpha}$)

Dobbiamo vedere che $\Phi$ è ben definita.

Vogliamo vedere che $\Phi$ è ben definita.

Indipendenza dalla scelta di $\gamma$: fatta a lezione la volta scorsa.

Vediamo l'indipendenza di $\Phi([\beta])$ dal rappresentante $\beta$ di $[\beta] \in [S^1, X]$.

Siano $\beta, \beta'$ due rappresentanti di $[\beta]$.

Se $\beta(1) = \beta'(1) = x_0$, visto la lezione scorsa.

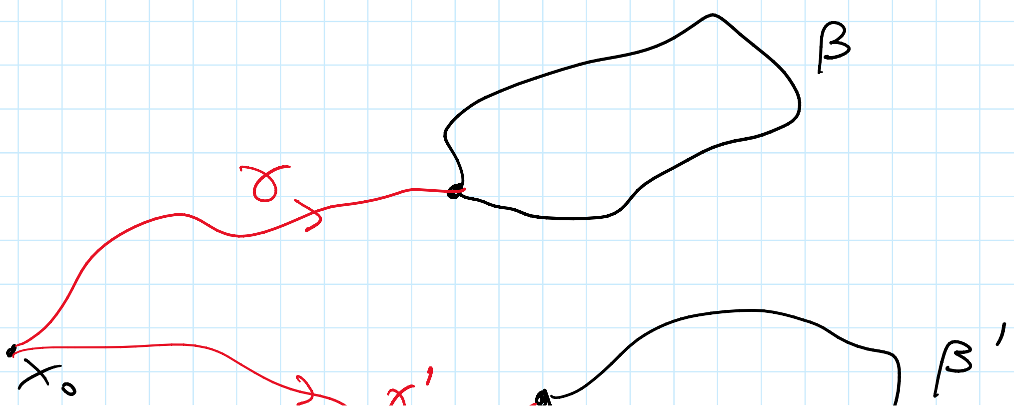
Siano ora $\beta, \beta'$ generici. Come sopra, siano $\alpha, \alpha' : [0,1] \to X$ i lacci associati, cioè

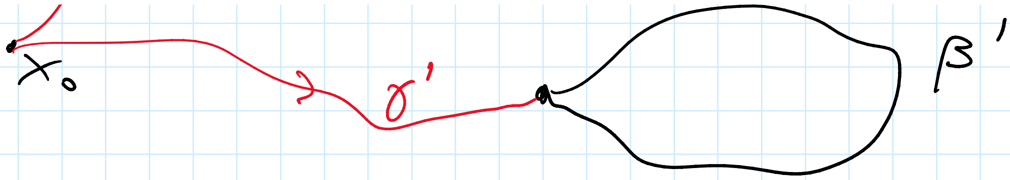
$\alpha(t) = \beta(e^{2\pi i t})$, $\alpha'(t) = \beta'(e^{2\pi i t})$, e siano

$\gamma, \gamma' : [0,1] \to X$ cammini con

$\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = \beta(1)$,

$\gamma'(0) = x_0$, $\gamma'(1) = \beta'(1)$.






Devo dimostrare che $\gamma * \alpha * \gamma^{-1}$ e $\gamma' * \alpha' * (\gamma')^{-1}$ definiscono lo stesso elemento di $\pi_1(X, x_0)$ A MENO DI CONIUGIO.

Devo naturalmente usare che $\beta$ e $\beta'$ sono liberamente omotopi. Passando alle mappe $S^1 \to X$ associate a $\gamma * \alpha * \gamma^{-1}$ e $\gamma' * \alpha' * (\gamma')^{-1}$ otteniamo

$$\widehat{\gamma * \alpha * \gamma^{-1}} \simeq \widehat{\alpha * \gamma^{-1} * \gamma} \simeq \hat{\alpha} * 1_{\beta(1)} \simeq \hat{\alpha} = \beta$$

visto la volta scorsa

per definizione di $\hat{\alpha}$

omotopi come mappe $S^1 \to X$

$$\widehat{\gamma' * \alpha' * (\gamma')^{-1}} \simeq \widehat{\alpha' * \gamma' * (\gamma')^{-1}} \simeq \hat{\alpha}' * 1_{\beta'(1)} \simeq \hat{\alpha}' = \beta'$$

Dunque, poiché $[\beta] = [\beta']$ in $[S^1, X]$, abbiamo $\left[\widehat{\gamma' * \alpha' * (\gamma')^{-1}}\right] = \left[\widehat{\gamma * \alpha * \gamma^{-1}}\right]$ in $[S^1, X]$.

otteniamo $[\gamma' * \alpha' * (\gamma')^{-1}] = [\gamma * \alpha * \gamma^{-1}]$ in $[S^1, X]$.

Ma le mappe $\widehat{\gamma' * \alpha' * (\gamma')^{-1}}, \widehat{\gamma * \alpha * \gamma^{-1}} : S^1 \to X$ mandano $1 \in S^1$ in $x_0 \in X$, per cui, per quanto già visto nel caso $\beta(1) = \beta'(1) = x_0$, le mappe $\gamma' * \alpha' * (\gamma')^{-1}, \gamma * \alpha * \gamma^{-1} : [0,1] \to X$ definiscono lo stesso elemento di $\pi_1(X, x_0)$ a meno di coniugio. Dunque $\Phi$ è ben definita.

Infine, dobbiamo verificare che le mappe costruite sono una l'inversa dell'altra.

Studiamo prima la composizione più facile.

$$\frac{\pi_1(X, x_0)}{\text{coniugio}} \longrightarrow [S^1, X] \xrightarrow{\Phi} \frac{\pi_1(X, x_0)}{\text{coniugio}}$$

Preso un rappresentante $\alpha : [0,1] \to X$, con $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$, ottengo $[\hat{\alpha}] \in [S^1, X]$, e poi, per definizione di $\Phi$, per calcolare $\Phi([\hat{\alpha}])$ posso scegliere $\gamma = 1_{x_0}$.

[illegible]

e ottenere $\Phi([\hat{\alpha}]) = [1_{x_0} * \alpha * 1_{x_0}^{-1}] = [\alpha]$.

Dunque questa composizione è l'identità.

Per l'altra composizione, sia $\beta : S^1 \to X$

$$[S^1, X] \xrightarrow{\bar{\Phi}} \pi_1(X, x_0)/_{\text{coniugio}} \xrightarrow{\Psi} [S^1, X].$$

Sia $\gamma : [0,1] \to X$ con $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = \beta(1)$,

e sia $\alpha : [0,1] \to X$ tale che $\hat{\alpha} = \beta$.

$$\Psi(\Phi([\beta])) = \Psi([\gamma * \alpha * \gamma^{-1}]) = [\widehat{\gamma * \alpha * \gamma^{-1}}] =$$

$$= [\widehat{\alpha * \gamma^{-1} * \gamma}] = [\hat{\alpha}] = [\beta].$$

Questo conclude la dimostrazione.

---

Esercizio 7: Dimostriamo una cosa lievemente più forte.

Sia $\alpha \in \Omega(X, x_0)$. Allora sono fatti equivalenti:

① $[\alpha] = 1$ in $\pi_1(X, x_0)$.

② $[\hat{\alpha}] = [1_{x_0}]$ in $[S^1, X]$.

③ $\hat{\alpha}: S^1 \to X$ si estende a una mappa continua
$A: D^2 \to X$, $D^2 = \{x \in \mathbb{R}^2, \|x\| \leq 1\}$.

①⟺② significa che "essere banali" nel $\pi_1$ o in omotopia libera (cioè in $[S^1, X]$, perciò senza punti base) sono fatti equivalenti, nonostante in generale essere equivalenti in $\pi_1(X, x_0)$ è strettamente più forte che esserlo in $[S^1, X]$, come dimostra l'esercizio precedente.

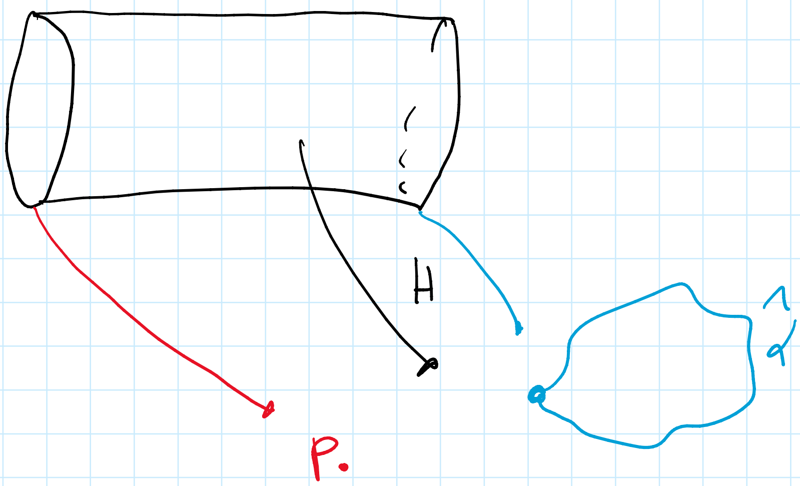
①⟺②: Poiché la classe di coniugio dell'identità di un gruppo è la sola identità, per quanto visto nell'esercizio precedente
$[\hat{\alpha}] = [1_{x_0}]$ in $[S^1, X]$ ⟺
$[\alpha]$ è coniugato a $[1_{x_0}] = 1$ in $\pi_1(X, x_0)$ ⟺

$[\alpha]$ è coniugato a $[1_{x_0}] = 1$ in $\pi_1(X, x_0) \iff$

$[\alpha] = 1$ in $\pi_1(X, x_0)$.

② $\iff$ ③ Supponiamo $\hat{\alpha} : S^1 \to X$ omotopo a una costante, e sia $H : S^1 \times [0,1] \to X$ un'omotopia tale che $H_0 = 1_p$ = cammino costante in $p$.

$H_1 = \hat{\alpha}$.

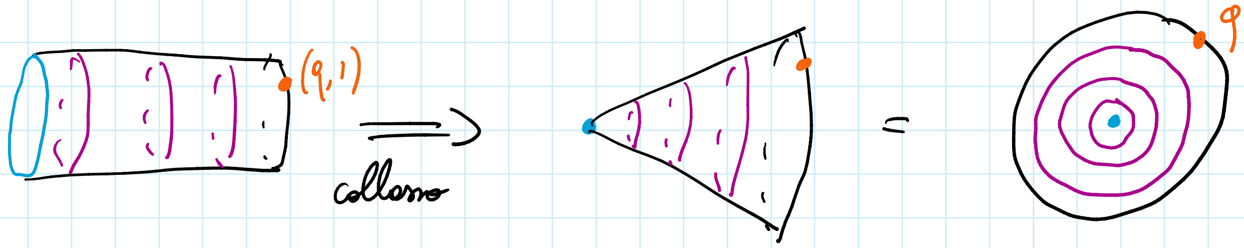



Poiché $H(S^1 \times \{0\}) = p$, l'applicazione $H$ passa al quoziente in $\dfrac{S^1 \times [0,1]}{S^1 \times \{0\}}$.

$$\begin{tikzcd}
S^1 \times [0,1] \arrow[r, "H"] \arrow[d, "\pi"] & X \\
\dfrac{S^1 \times [0,1]}{S^1 \times \{0\}} \arrow[ur, "\bar{H}"] &
\end{tikzcd}$$

$$\frac{S^1\times[0,1]}{S^1\times\{0\}}$$

Per concludere, basta vedere che $\dfrac{S^1\times[0,1]}{S^1\times\{0\}}$ è omeomorfo a $D^2$ tramite un omeomorfismo che identifica $\pi(S^1\times\{1\})$ con $S^1=\partial D^2\subseteq D^2$.




Sia $g: S^1\times[0,1]\longrightarrow D^2$ $\quad g(x,t)=tx$.

$g$ è surgettiva e chiusa (in quanto va da un compatto a uno spazio $T_2$), dunque è un'identificazione, e, poiché $g((x,t))=g((y,t'))\iff (x,t)=(y,t')$ o $t=t'=0$,

induce un omeomorfismo $\bar{g}: \dfrac{S^1\times[0,1]}{S^1\times\{0\}}\longrightarrow D^2$

L'estensione cercata è $\bar{H}\circ\bar{g}^{-1}: D^2\longrightarrow X$

(è continua perché composizione di continue e, se $q\in S^1$

$$\bar{H}(y^{-1}(q)) = \bar{H}([q,1]) = H(q,1) = \hat{\alpha}(q).$$

Viceversa, se $A: D^2 \to X$ è un'estensione di $\hat{\alpha}$, basta porre $H: S^1 \times [0,1] \to X$

$$H(q,t) = A(t \cdot q).$$

$\square$

---

Per il momento, non abbiamo ancora esibito alcuno spazio $X$ per cui $\pi_1(X, x_0) \neq \{1\}$. Sappiamo che contraibile (cioè omotopicamente equivalente a un punto) $\Rightarrow \pi_1(X,x_0) = \{1\}$, per cui $\pi_1(\mathbb{R}^n, x_0) = \{1\}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$,

e lo stesso vale per ogni dominio stellato di $\mathbb{R}^n$.

Il primo (e fondamentale) esempio di spazio con $\pi_1$ non banale è $S^1$. Per vedere che $\pi_1(S^1, x_0) \neq \{1\}$, procedere direttamente è doloroso. Molto meglio (e più utile in prospettiva futura) è usare la

# TEORIA DEI RIVESTIMENTI

**Definizione:** $f: X \to Y$ continua è un omeomorfismo locale se $\forall p \in X$ $\exists$ aperto $U \subseteq X$ con $p \in U$ tale che:

① $f(U)$ è aperto in $Y$

② $f_{|U}: U \to f(U)$ è un omeomorfismo.

**Fatti:** Se $f: X \to Y$ è un omeomorfismo locale, $f$ è aperta e $\forall p \in Y$, la fibra $f^{-1}(p)$ è discreta.

Infatti, se $\Omega \subseteq X$ è aperto, $\forall p \in \Omega$ sia $U_p$ un intorno aperto come nella definizione di omeomorfismo locale. Allora $\Omega \cap U_p$ è un aperto di $U_p$, per cui, essendo $f_{|U_p}$ un omeomorfismo nell'immagine, $f(U_p \cap \Omega)$ è aperto in $f(U_p)$, che è a sua volta aperto in $Y$. Poiché aperto di un aperto è aperto nello spazio ambiente, $f(U_p \cap \Omega)$ è aperto in $Y$. Dunque

$$f(\Omega) = \bigcup_{p \in \Omega} f(U_p \cap \Omega)$$ è unione di aperti, ed è aperto.

Inoltre, siano $p \in Y$ e $F = f^{-1}(p) \subseteq X$. Se $q \in F$, $\exists\, U_q$ aperto di $X$ tale che $q \in U_q$ e $f_{|U_q}$ è iniettiva, per cui l'unico punto di $U_q$ portato in $p$ da $f$ è $q$ stesso, cioè $\{q\} = F \cap U_q$, dunque $q$ è aperto in $F$, cioè $F$ ha la topologia discreta.

(Attenzione: se $Y$ non è $T_1$, $F$ potrebbe non essere chiuso).

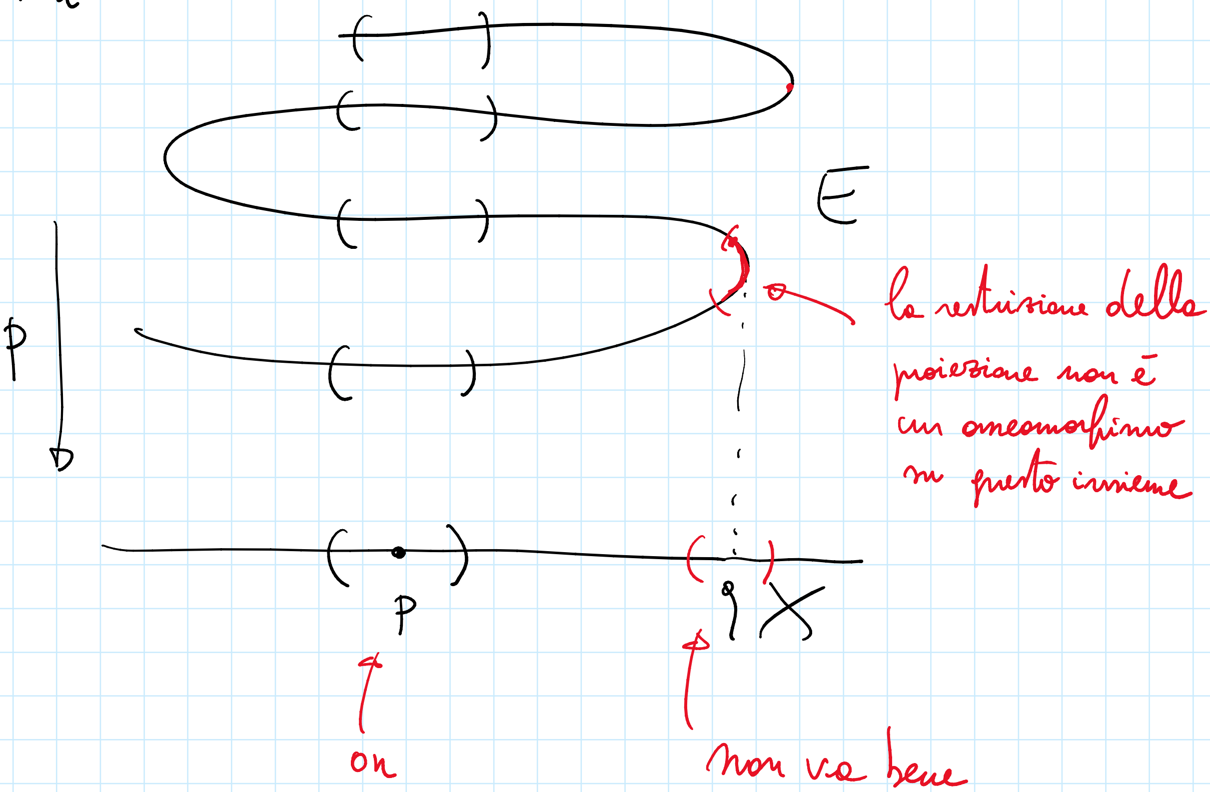
Esempi: L'inclusione di un aperto nello spazio ambiente è un omeomorfismo locale.

Def.: $p: E \to X$ continua è un RIVESTIMENTO se $X$ è connesso e $\forall p \in X$ esiste un intorno aperto $U$ di $p$ in $X$ tale che

$$p^{-1}(U) = \coprod_{i \in I} V_i, \quad I \neq \emptyset, \text{ dove } V_i \subseteq E \text{ è aperto } \forall i \in I, \text{ e}$$

unione disgiunta

$$p_{|V_i}: V_i \to U \text{ è un omeomorfismo } \forall i \in I.$$




Un aperto $U$ come nella definizione si chiama "banalizzante" o "ben rivestito".

Proposizione: Sia $p: E \to X$ un rivestimento. Allora

1. $p$ è un omeomorfismo locale.
2. $p$ è surgettivo.

Dim.: 1. Dato $q \in E$, se $U$ è un intorno ben rivestito di $p(q)$, allora $p^{-1}(U) = \coprod_{i \in I} V_i$, e $q \in V_{i_0}$ per qualche $i_0 \in I$.

$p_{|V_{i_0}} : V_{i_0} \to U$ è un omeomorfismo tra aperti di $E$ e di $X$, dunque $p$ è un omeo locale.

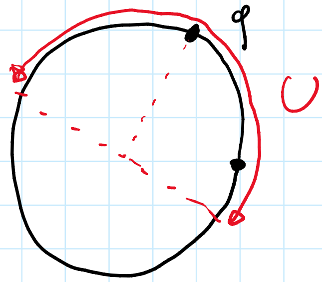
2. è ovvio.

$\boxed{\text{Esempio fondamentale}}$: la funzione $p: \mathbb{R} \to S^1$
$p(t) = e^{2\pi i t}$ è un rivestimento.

Dimostrazione: Sia $q \in S^1$. $\exists t_0 \in \mathbb{R}$ t.c. $q = e^{2\pi i t_0} = p(t_0)$. Dico che

$$U = \left\{ e^{2\pi i t}, \quad |t - t_0| < \frac{1}{4} \right\}$$

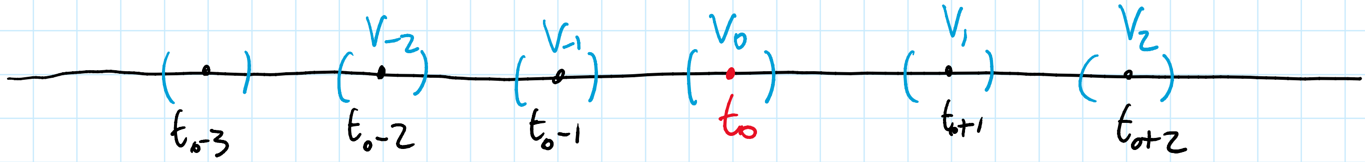
è un intorno ben rivestito (si poteva prendere anche $\frac{1}{2}$ al posto di $\frac{1}{4}$).

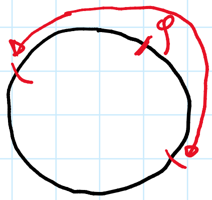



Se $|t - t_0| < \frac{1}{4}$,

$$|2\pi t - 2\pi t_0| < \frac{\pi}{2}$$

Infatti, $p^{-1}(U) = \coprod_{k \in \mathbb{Z}} \left( t_0 - \frac{1}{4} + k, \; t_0 + \frac{1}{4} + k \right)$




Posto $V_k = \left( t_0 - \frac{1}{4} + k, \; t_0 + \frac{1}{4} + k \right)$, abbiamo

$p^{-1}(U) = \coprod_{k \in \mathbb{Z}} V_k$, e $p_{|V_k} : V_k \to U$ omeomorfismo $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Dunque $p$ è un rivestimento.

Proposizione: Sia $p: E \to X$ un rivestimento. Allora la cardinalità delle fibre è costante, cioè $\forall x_0, x_1 \in X$, $|p^{-1}(x_0)| = |p^{-1}(x_1)|$ ( $|Z|$ denota la cardinalità di $Z$).

Dim.: Fissiamo $x_0 \in X$. Basta vedere che l'insieme $\Omega_{x_0} = \{x \in X$ tali che $|p^{-1}(x)| = |p^{-1}(x_0)|\}$ è aperto e chiuso in $X$: visto che $X$ è connesso, ciò implicherà $\Omega_{x_0} = X$, che è la tesi.

Mostriamo che è aperto. Sia $\bar{x} \in \Omega_{x_0}$, e sia $U$ un intorno ben rivestito di $X$. Allora

$p^{-1}(U) = \coprod_{i \in I} V_i$, e $p|_{V_i}: V_i \to U$ è bijettiva $\forall i \in I$,

per cui $\forall x \in U$, $|p^{-1}(x) \cap V_i| = 1$ $\forall i \in I$ e

$p^{-1}(x) \subseteq \coprod_{i \in I} V_i$, per cui

$|p^{-1}(x)| = |I|$ $\forall x \in U$, e dunque

$|p^{-1}(x)| = |p^{-1}(\bar{x})| = |p^{-1}(x_0)| \Rightarrow U \subseteq \Omega_{x_0}$.

Dunque $\Omega_{x_0}$ è intorno di ogni suo punto, e perciò è aperto.

Vediamo che anche il complementare è aperto.

Se $\bar{x} \notin \Omega_{x_0}$, allora $|p^{-1}(\bar{x})| \neq |p^{-1}(x_0)|$.

Però, ragionando come sopra, $\exists$ intorno $U$ di $\bar{x}$ tale che, $\forall x \in U$, $|p^{-1}(x)| = |p^{-1}(\bar{x})| \neq |p^{-1}(x_0)|$.

$\Rightarrow U \subseteq \Omega_{x_0}^c$, perciò anche $\Omega_{x_0}^c$ è aperto.

Dunque $\Omega_{x_0}$ è aperto e chiuso, come voluto.

$\square$