Topologia unione disgiunta.

Siano X, Y due spazi topologici. Vogliamo porre su $X \amalg Y$ la topologia "unione disgiunta" definita come segue:

(per semplicità, assumiamo $X \cap Y = \emptyset$, altrimenti dovremmo prendere $X \times \{0\}$ e $Y \times \{1\}$, in modo da renderli disgiunti a forza, e porre $X \amalg Y = (X \times \{0\}) \cup (Y \times \{1\})$, salvo poi identificare X con $X \times \{0\}$ e Y con $Y \times \{1\}$).

Def.: la topologia unione disgiunta è definita così:

$A \subseteq X \amalg Y$ è aperto $\Longleftrightarrow$ $A \cap X$ è aperto in X e $A \cap Y$ è aperto in Y.

È banale verificare che gli assiomi di topologia sono verificati.

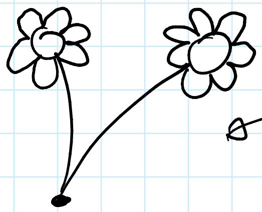
Per definizione, X e Y sono sottoinsiemi sia aperti sia chiusi di $X \amalg Y$ (in quanto $X \cap X = X$ e

chiusi di $X \sqcup Y$ (in quanto $X \cap X = X$ e
$X \cap Y = \emptyset$, il
che mostra che X è aperto e
chiuso in $X \sqcup Y$;
analogamente per Y).

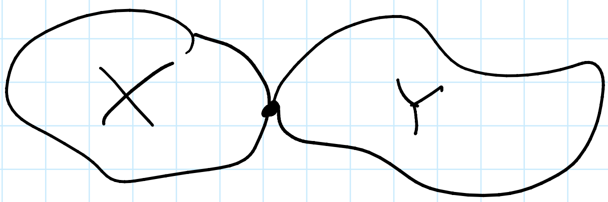
Se $X \neq \emptyset$ e $Y \neq 0$, $X \sqcup Y$ è sconnesso.

Nel terzo foglio di esercizi trovate alcune proprietà (tutte semplici e di verifica immediata) su queste topologie.

Bouquet di spazi topologici.



bouquet di fiori



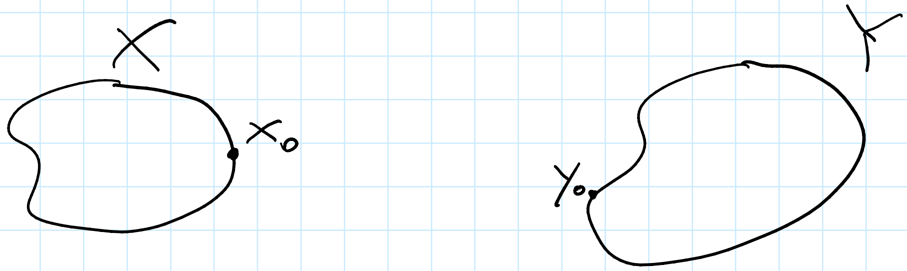
bouquet di spazi.

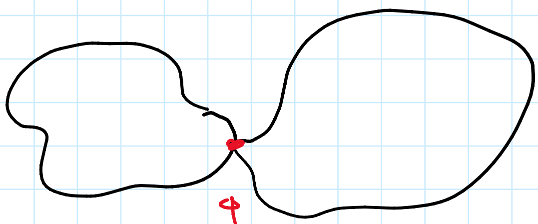
Siano X, Y spazi topologici con punti base fissati $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$. Il bouquet di X e Y (con punti base x_0, y_0) si definisce come segue

topologia unione disgiunta

$$(X, x_0) \vee (Y, y_0) = \frac{X \sqcup Y}{\{x_0, y_0\}}$$

topologia quoziente





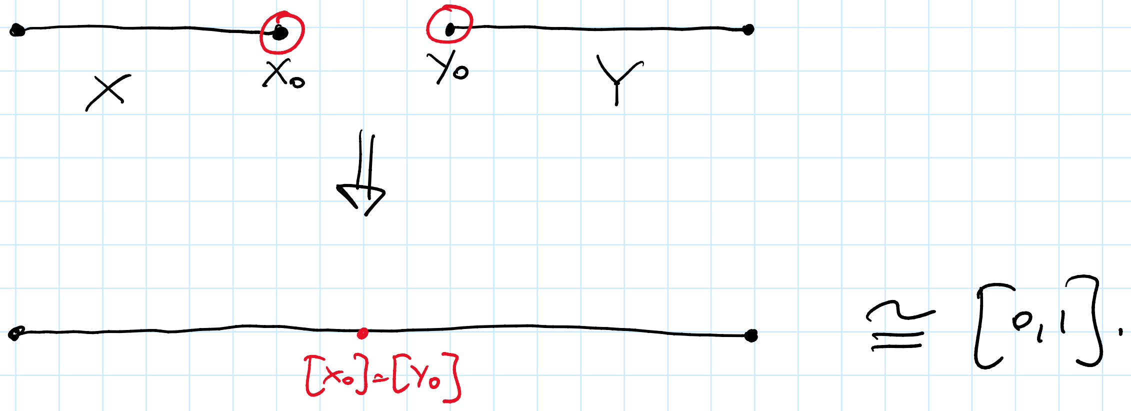
$(X, x_0) \vee (Y, y_0)$

$[x_0] = [y_0]$

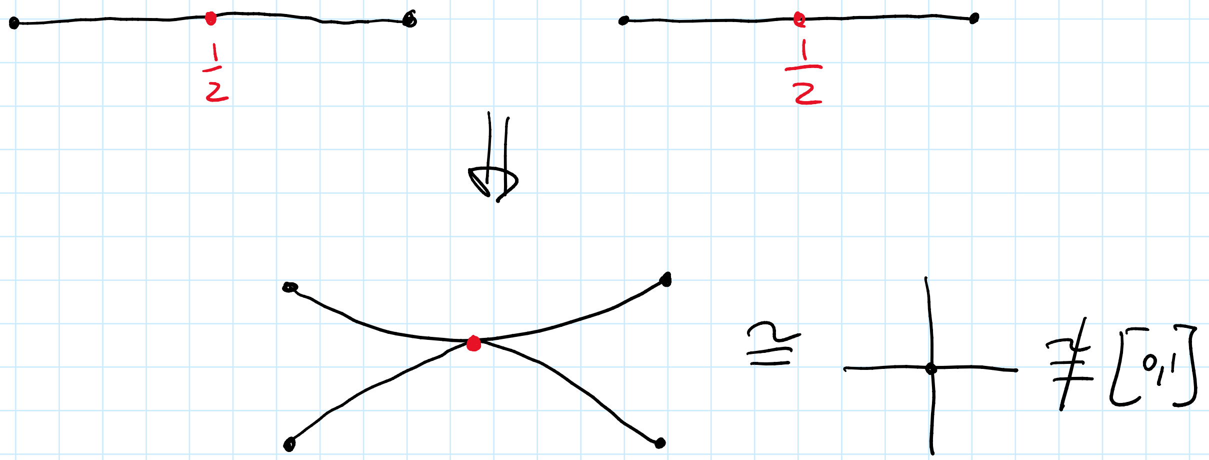
Domanda: Il bouquet dipende dalla scelta dei punti base?

Sì!

Se $X = Y = [0,1]$, e $x_0 = 1$, $y_0 = 0$



Se invece $x_0 = y_0 = \frac{1}{2}$,



(Per esercizio, dimostrate che $([0,1],\{1\}) \vee ([0,1],\{0\}) \cong [0,1]$, che $([0,1],\frac{1}{2}) \vee ([0,1],\frac{1}{2}) \cong ([-1,1]\times\{0\}) \cup (\{0\}\times[-1,1]) \subseteq \mathbb{R}^2$, e che questi due spazi non sono omeomorfi).

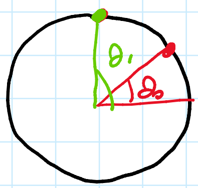
Def.: X si dice **OMOGENEO** se $\forall\, x_0, x_1 \in X$

Def.: X si dice **OMOGENEO** se $\forall\, x_0, x_1 \in X$
$\exists\, f : X \to X$ omeomorfismo tale che $f(x_0) = x_1$.

Esempi: ① $[0,1]$ non è omogeneo: non esiste un omeo $f : [0,1] \to [0,1]$ tale che $f(0) = \frac{1}{2}$, perché 0 non sconnette $[0,1]$, mentre $\frac{1}{2}$ lo sconnette.

② $(0,1)$ è omogeneo (ex.).

③ S^1 è omogeneo: dati $e^{i\theta_0}$, $e^{i\theta_1}$ in S^1, la rotazione $z \mapsto e^{i(\theta_1 - \theta_0)} \cdot z$ è un ben definito omeomorfismo di S^1 che porta $e^{i\theta_0}$ in $e^{i\theta_1}$.



rotazione di angolo $\theta_1 - \theta_0$

Fatto: Se X e Y sono omogenei, $(X, x_0) \vee (Y, y_0)$ non dipende (a meno di omeo) dalla scelta di x_0 e y_0.

Infatti, dati $x_1 \in X$, $y_1 \in Y$ arbitrari, per ipotesi $\exists f: X \to X$ omeomorfismo con $f(x_0) = x_1$, $\exists g: Y \to Y$ omeomorfismo con $g(y_0) = y_1$.

omeomorfismo

$$\begin{tikzcd} X \sqcup Y \arrow[r, "f \sqcup g"] \arrow[d, "\pi_0"] & X \sqcup Y \arrow[r, "\pi_1"] & (X, x_1) \vee (Y, y_1) \\ (X, x_0) \vee (Y, y_0) \arrow[urr, "\overline{f \sqcup g}"'] & & \end{tikzcd}$$

Per la proprietà universale della topologia quoziente, $\overline{f \sqcup g}$ è continua. Se ne costruisce un'inversa continua procedendo nello stesso modo con $f^{-1} \sqcup g^{-1}$.

Proposizione: Siano X, Y topologici con punti base x_0, y_0. Indichiamo con $X \vee Y$ lo spazio $(X, x_0) \vee (Y, y_0)$. Siano $i_X : X \to X \sqcup Y$, $i_Y : Y \to X \sqcup Y$

le inclusioni, $\pi : X \sqcup Y \to X \vee Y$ e

$J_X : X \to X \vee Y$, $J_X = \pi \circ i_X$,

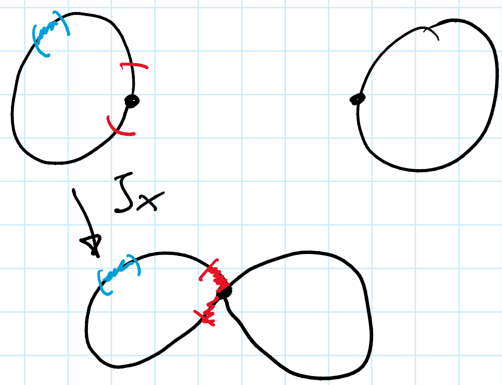
$J_Y : Y \to X \vee Y$, $J_Y = \pi \circ i_Y$.

Allora:

1. i_X, i_Y, J_X, J_Y sono immersioni topologiche (cioè sono omeomorfismi con la loro immagine).
2. $X \vee Y$ è connesso $\Longleftrightarrow$ X e Y entrambi connessi
3. $X \vee Y$ è compatto $\Longleftrightarrow$ X e Y entrambi compatti
4. Se X, Y sono T_1, allora anche $X \vee Y$ lo è, e J_X, J_Y sono immersioni topologiche chiuse.
5. Se X, Y sono T_2, anche $X \vee Y$ lo è.
6. Attenzione: Se X, Y sono T_4, non è detto che $X \vee Y$ lo sia!

Dimostrazione (Tutti questi fatti, ed altri, si trovano nel terzo foglio di esercizi).

(1) Che $i_X: X \to X \sqcup Y$ sia un'immersione topologica è ovvio: segue immediatamente dalla definizione che è iniettiva, continua e aperta.
È meno banale che $J_X: X \to X \vee Y$ sia un'immersione topologica. Essendo composizione di funzioni continue, è continua. È chiaramente iniettiva.
Dobbiamo vedere che è aperta nell'immagine (attenzione: non sarà aperta in generale!).



Nel caso di $S_1 \vee S_1$, un intorno di x_0 non va in un intorno di $[x_0]$, per cui la mappa non è aperta; però è aperta nell'immagine!

Infatti, sia $A \subseteq X$ un aperto. Se $x_0 \notin A$,

allora $\pi^{-1}(j_X(A)) \overset{\text{uso } x_0 \notin A}{=} A \subseteq X \sqcup Y$,

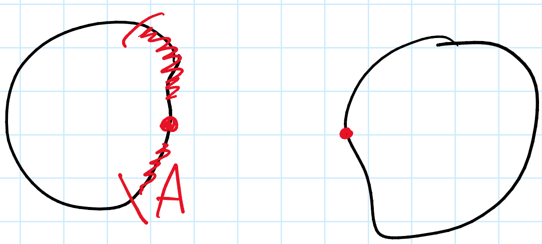
che è aperto in $X \sqcup Y$ in quanto

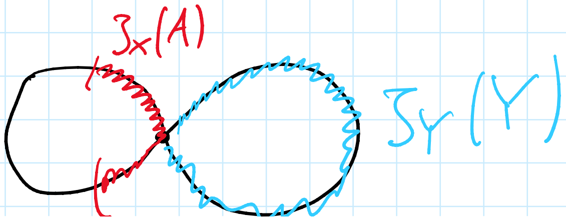
$A \cap X = A$ (che è aperto per ipotesi), $A \cap Y = \emptyset$.

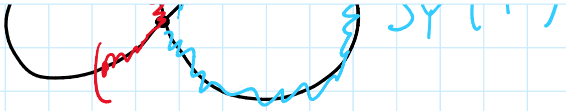
Per definizione di topologia quoziente, $\pi^{-1}(j_X(A))$ aperto implica $j_X(A)$ aperto, e dunque siamo a posto.

Se invece $x_0 \in A$, $\pi^{-1}(j_X(A)) = A \cup \{y_0\}$, che in generale non è aperto in $X \sqcup Y$. Infatti $j_X(A)$ non sarà aperto in $X \vee Y$ in generale.

Tuttavia, $j_X(A) \cap \mathrm{Im}(j_X) \underset{\text{uso } x_0 \in A}{=} (j_X(A) \cup j_Y(Y)) \cap \mathrm{Im}(j_X)$





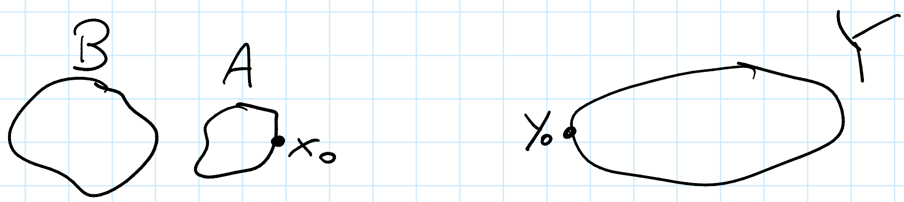


Per definizione di topologia di sottospazio, basta vedere che $j_X(A) \cup j_Y(Y)$ è aperto in $X \vee Y$.

Ma $\pi^{-1}(j_X(A) \cup j_Y(Y)) = A \cup Y \subseteq X \sqcup Y$ che è banalmente aperto in $X \sqcup Y$.

(2) Se X, Y sono connessi, allora anche $j_X(X) \cong X$, $j_Y(Y) \cong Y$ lo sono, e perciò $X \vee Y = j_X(X) \cup j_Y(Y)$ è connesso, in quanto unione di connessi con intersezione non vuota.

Viceversa, supponiamo ad esempio X sconnesso. Allora $X = A \cup B$, A, B aperti non vuoti, $A \cap B = \emptyset$. Supponiamo $x_0 \in A$. Consideriamo



$B' = j_X(B)$, $A' = j_X(A) \cup j_Y(Y)$.

Per costruzione $X \vee Y = A' \cup B'$, $A' \cap B' = \emptyset$.

Inoltre, B' è aperto in quanto $\pi^{-1}(B') = B \subseteq X \sqcup Y$

A' è aperto in quanto $\pi^{-1}(A') = A \cup Y \subseteq X \sqcup Y$.

3 Si risolve in maniera simile (come in 2, per costruire un aperto di $X \vee Y$ a partire da un aperto A di X si danno due casi: se $x_0 \notin A$, si prende $J_X(A)$; se $x_0 \in A$, si prende $J_X(A) \cup J_Y(Y)$; così facendo, da un ricoprimento aperto di X se ne costruisce uno di $X \vee Y$).

4, 5, 6: Si veda il foglio di esercizi.

Bouquet di più spazi.

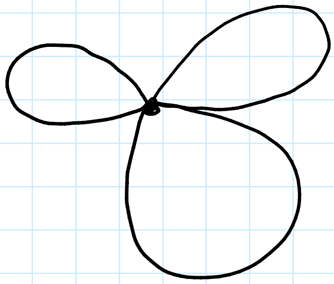
Se $(X_i, x_i)_{i \in I}$ è una collezione di spazi puntati, è possibile costruire il bouquet di tutti gli spazi:

$\bigvee (X$ $\quad \coprod X_i$ ← topologia unione disgiunta definita in modo ovvio

$$\bigvee_{i\in I}(X_i,x_i) = \frac{\coprod_{i\in I} X_i}{\{x_i,\ i\in I\}}$$

topologia unione disgiunta definita in modo ovvio

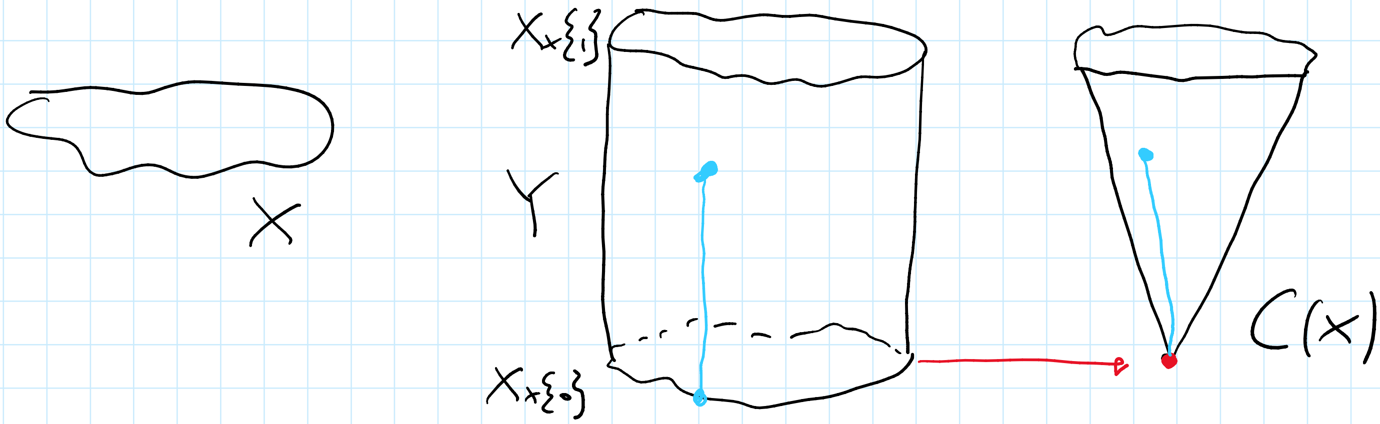
$$S^1 \vee S^1 \vee S^1 =$$



Costruzione "cono".

Sia X uno spazio topologico. Il cono su X si costruisce come segue: posto $Y = X \times [0,1]$, si pone

$$C(X) = \frac{Y}{X \times \{0\}}$$



Proposizione: Sia X uno spazio topologico. Allora

① $C(X)$ è connesso per archi.

② $C(X)$ è compatto $\Longleftrightarrow$ X è compatto.

Dim.: ① Sia $\pi: X \times [0,1] \to C(X)$ e denotiamo con $v = \pi(X \times \{0\})$ il vertice del cono. Mostriamo che la componente connessa per archi di v è tutto $C(X)$.

Dato $[(x_0, t_0)] \in C(X)$ qualsiasi, consideriamo

$\gamma: [0,1] \to X \times [0,1]$

$\gamma(t) = (x_0, t \cdot t_0)$.

γ è continua perché sono continue le sue proiezioni, per cui anche $\pi \circ \gamma$ è continua, e

$\pi \circ \gamma(0) = \pi(x_0, 0) = v$

$\pi \circ \gamma(1) = [x_0, t_0]$.

② Se X è compatto, $X \times [0,1]$ è compatto

(2) Se X è compatto, $X \times [0,1]$ è compatto (Tychonoff), per cui $C(X)$ è compatto (quoziente di un compatto è compatto).

Per il viceversa, si possono seguire diverse strade.

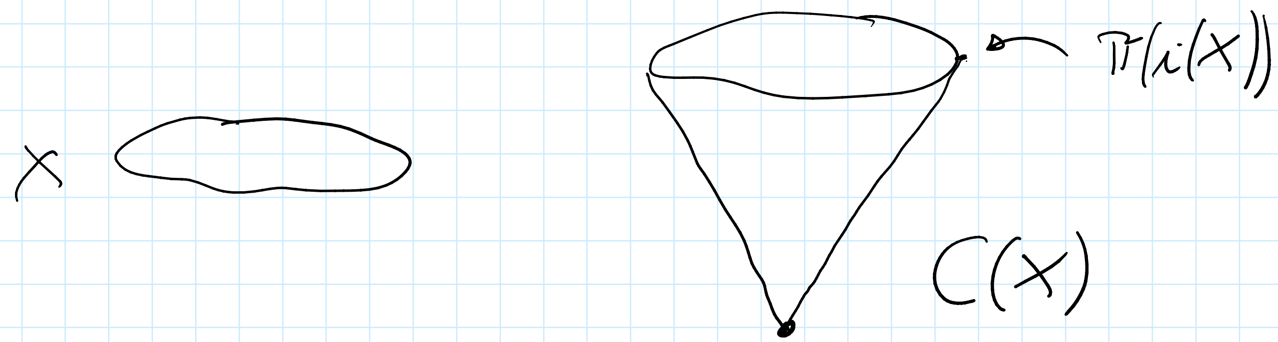
A partire da un ricoprimento aperto di X se ne può costruire uno di $C(X)$ (ma attenzione: quello ovvio non funziona: se $A \subseteq X$ è aperto, $\pi(A \times [0,1])$ potrebbe non essere aperto! Bisogna prendere $\pi(A \times [0,1]) \cup \pi(X \times [0,1)))$, e poi procedere con la dimostrazione.

Seguiamo un'altra strada, e mostriamo due cose:

(a) la composizione $X \xrightarrow{i} X \times \{1\} \xrightarrow{\pi} C(X)$ è un omeomorfismo con l'immagine

(b) $\pi(i(X))$ è chiuso in $C(X)$.

In tal modo, $C(X)$ compatto $\Rightarrow$ $\pi(i(X))$ compatto poiché un chiuso in un compatto è compatto, da cui $X \cong \pi(i(X))$ compatto.



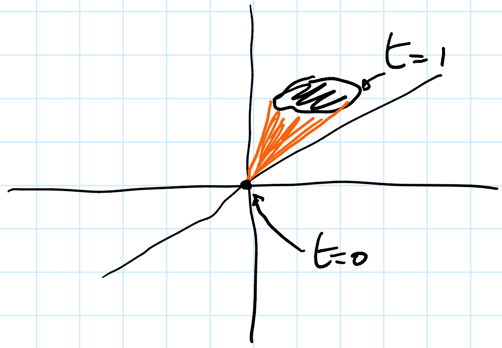
$\pi \circ i : X \to C(X)$ è chiaramente iniettiva e continua (in quanto composizione di mappe continue).

Vediamo che $\pi \circ i$ è chiusa, il che implicherà ⓐ e ⓑ.
Se C è un chiuso di X, per testare se $\pi \circ i(C)$ sia un chiuso di $C(X)$ devo verificare che $\pi^{-1}(\pi(i(C)))$ sia chiuso in $X \times [0,1]$. Ma $\pi^{-1}(\pi(i(C))) = C \times \{0\}$, che è chiuso in $X \times [0,1]$ in quanto prodotto di chiusi (riguardate le lezioni sulla topologia prodotto!).

Esercizio: Sia $X \subseteq \mathbb{R}^n$, e sia

$$C'(X) = \{(tx, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1},\ \underset{x \in X}{t \in [0,1]}\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}.$$

 $X \subseteq \mathbb{R}^2$



① Se X è compatto, $C'(X) \cong C(X)$

② Trovare un esempio $X \subseteq \mathbb{R}^n$ tale che $C'(X) \not\cong C(X)$.

Soluzione: ① Sia

$$f : X \times [0,1] \longrightarrow C'(X)$$
$$(x, t) \longmapsto (tx, t)$$

Questa mappa è chiaramente continua, e passa al quoziente definendo una bigezione

$$\overline{f} : C(X) \longrightarrow C'(X).$$

(Questo è vero anche se X non è compatto!)

Per concludere, basta osservare che se X è compatto

Per concludere, basta osservare che se X è compatto anche $X \times [0,1]$ lo è; inoltre $C'(X)$ è T_2 in quanto sottospazio di $\mathbb{R}^{n+1}$, per cui f è chiusa, e perciò è un'identificazione.

② Basta prendere $X = \mathbb{R}$, in quanto

$$C(\mathbb{R}) = \frac{\mathbb{R} \times [0,1]}{\mathbb{R} \times \{0\}}$$

non è I-numerabile (visto prima di Natale), mentre qualsiasi sottospazio di $\mathbb{R}^{n+1}$ (e dunque anche $C'(\mathbb{R})$) è I-numerabile.