2020_12_09

mercoledì 9 dicembre 2020 08:59

Spazi proiettivi (reali) come spazi topologici.

Sia $U_i \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, $i = 0, \ldots, n$, $U_i = \{x_i \neq 0\}$.

Abbiamo visto la volta scorsa che

$$j_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow U_i$$

$$j_i(x_1, \ldots x_n) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_i, \ldots, x_n)$$

è un'immersione topologica aperta $\forall i = 0, \ldots, n$, cioè U_i è aperto in $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ e j_i è un omeomorfismo tra $\mathbb{R}^n$ e U_i.

Prop.: $f : \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ proiettività. Allora f è un omeomorfismo.

Dim.: Per definizione di proiettività, $\exists\, \varphi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ lineare t.c. $f([v]) = [\varphi(v)]$ $\forall v \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$.

Essendo lineare invertibile, φ è un omeomorfismo

Essendo lineare invertibile, φ è un omeomorfismo di $\mathbb{R}^{n+1}$ in sé, dunque induce un omeomorfismo

$$\varphi' : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}.$$

La mappa $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \xrightarrow{\varphi'} \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, essendo composizione di funzioni continue, è continua.

Inoltre, il suo "passaggio al quoziente" è f:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[d, "\pi"] & \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \arrow[r, "\pi"] & \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \\
\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \arrow[urr, "f"'] & &
\end{tikzcd}$$

Dunque, per la proprietà universale della topologia quoziente, f è continua. Per vedere che è un omeomorfismo basta osservare che $\pi \circ \varphi'$, essendo composizione di un omeomorfismo e di una mappa aperta (π è aperta) è una mappa aperta surgettiva, dunque un'identificazione.

Oppure si può applicare lo stesso argomento a f^{-1}, mostrando che è continua.

$\square$

Nota: $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è aperta, in quanto quoziente rispetto a un'azione di gruppo.

Corollario: $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è T_2.

Dimostrazione: Siano $P, Q \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, $P \neq Q$, e sia $H \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ un iperpiano con $P \notin H$, $Q \notin H$.

Sia f una proiettività con $f(H) = \{x_0 = 0\}$.

Per costruzione, $f(P) \in U_0$, $f(Q) \in U_0$ e sono distinti.

Ma $U_0 \cong \mathbb{R}^n$ è T_2, per cui esistono aperti V_P e V_Q di U_0 con $f(P) \in V_P$, $f(Q) \in V_Q$, $V_P \cap V_Q = \emptyset$. Poiché U_0 è aperto in $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, V_P e V_Q sono aperti di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. Per la proposizione precedente, $f^{-1}(V_P)$ e $f^{-1}(V_Q)$ sono aperti disgiunti di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ con $P \in f^{-1}(V_P)$, $Q \in f^{-1}(V_Q)$.

$\square$

Prop.: $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è connesso per archi.

Dim: Se $n=0$, $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è un punto, che è connesso per archi. Se $n>0$, allora $\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$ è connesso per archi in quanto $n+1\geq 2$, per cui $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è immagine continua di un connesso per archi, dunque è connesso per archi.

$\square$

Per vedere che $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è compatto, lo realizziamo come quoziente di S^n.

Consideriamo $\pi: \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

$\forall P\in \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, $\exists v\in\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$ con $P=[v]$. Ma allora $P=\left[\frac{v}{\|v\|}\right]$, e $\frac{v}{\|v\|}\in S^n$, per cui

$\pi_{|S^n}: S^n \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è surgettiva.

Inoltre, se $v,w\in S^n$, allora $\pi(v)=\pi(w) \iff$ $\exists\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $v=\lambda w$. Poiché $\|v\|=\|w\|=1$, necessariamente se $v=\lambda w$, si ha $|\lambda|=1$, cioè $\lambda=\pm 1$,

cioè $v=\pm w$. Dunque se $v,w\in S^n$, $\pi(v)=\pi(w)$

se e solo se $v=\pm w$. Pertanto,

$$
\begin{tikzcd}
\pi_{|S^n} : S^n \arrow[r, "\pi"] \arrow[d] & \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \\
S^n/_{\pm Id} \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}
$$

Poiché π è surgettiva e chiusa (in quanto S^n è compatto e $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è T_2), π è un'identificazione.

Per quanto visto sopra, ciò implica che g è un omeomorfismo.

Abbiamo perciò il seguente:

Teorema: $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \cong S^n/_{\pm Id}$.

Corollario: $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è compatto (in quanto quoziente di S^n, che è compatto).

Ricapitolando, abbiamo dimostrato:

Teorema: $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è una varietà topologica n-dimensionale compatta e connessa per archi.

Ricordiamo che uno spazio topologico X è una varietà topologica n-dimensionale se:

① X è T_2,

② $\forall p \in X$, $\exists\, U \subseteq X$ aperto con $p \in U$, U omeomorfo a $\mathbb{R}^n$

(③ X è a base numerabile)

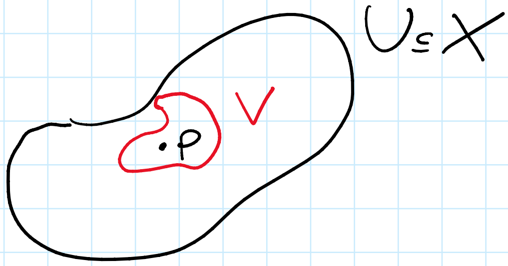
non tutti lo richiedono

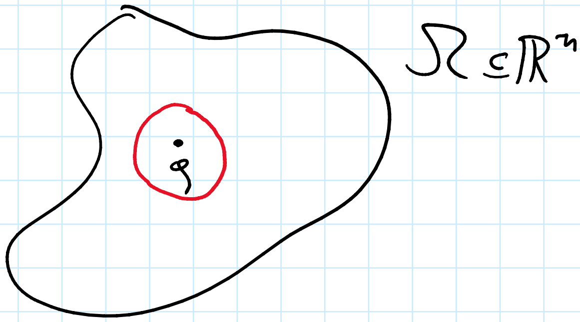
Ex.: la condizione ② è equivalente a

②': $\forall p \in X$, $\exists\, U \subseteq X$ aperto con $p \in U$,
U omeomorfo a un aperto di $\mathbb{R}^n$.

(Infatti, se $U \cong \Omega$, Ω aperto in $\mathbb{R}^n$,
$\exists\, V \subseteq U$ aperto con $p \in V$ e $V \cong B(q, \varepsilon)$)

per qualche $q\in\mathbb{R}^n$, $\varepsilon>0$; infine, $B(q,\varepsilon)\cong\mathbb{R}^n$).

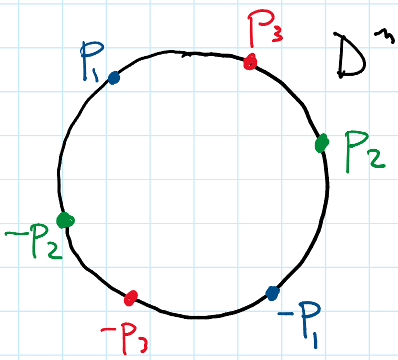




Proposizione: Sia $D^n=\{x\in\mathbb{R}^n,\ \|x\|\leq 1\}$, e sia

$$p\sim q \iff p=q \ \text{ o } \ (\|p\|=\|q\|=1 \ \text{ e } \ p=-q)$$

Allora $D^n/\sim\ \cong \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.



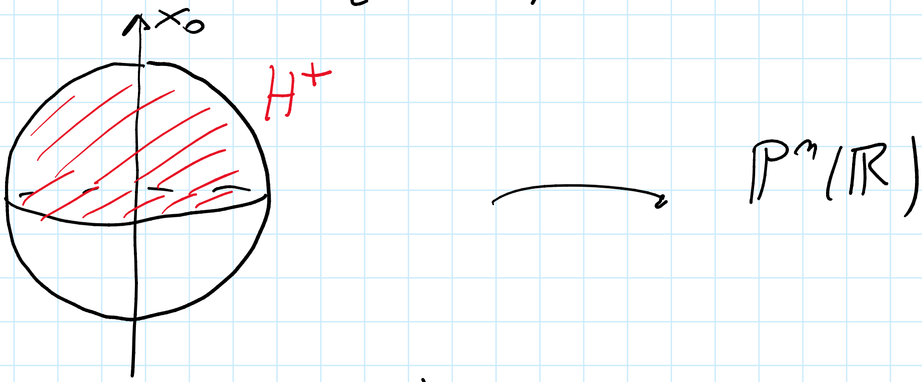
Dim.: Sia $H^+=\{(x_0,\dots x_n)\in S^n,\ x_0\geq 0\}$

l'emisfero "nord" (rispetto alla coordinata 0) di S^n.

Allora $\pi: S^n\to\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ si restringe a

una mappa surgettiva $\pi_{|H^+}: H^+\to\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$,

in quanto ogni $p\in\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ ha almeno un in quanto ogni $P \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ ha almeno un rappresentante $(x_0, \dots, x_n)$ con $x_0 \geq 0$ (e ne ha due se $P \in \{x_0 = 0\}$).



Inoltre, se $v, w \in H^+$, allora $\pi(v) = \pi(w) \iff v = \pm w$,

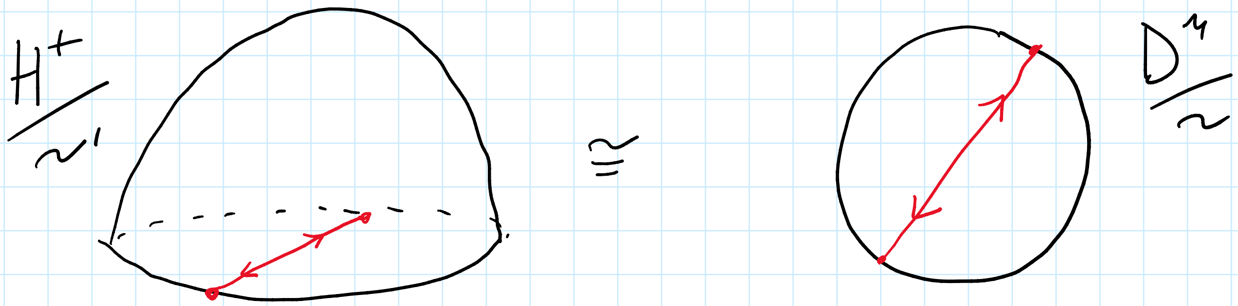
$\iff v = w$ o $v = -w$ e necessariamente $v, w \in \partial H^+ = H^+ \cap \{x_0 = 0\}$

Se $\forall v, w \in H^+$ poniamo $v \sim' w \iff v = w$ o $v, w \in \partial H^+$ e $v = -w$,

allora $\pi_{|H^+} : H^+ \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è surgettiva e chiusa (in quanto H^+ è compatto e $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è T_2), dunque è un'identificazione, e perciò la mappa $h : H^+/\sim' \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ indotta da π è un omeomorfismo.

$$H^+ \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$$

$$
\begin{tikzcd}
H^+ \arrow[r, "\pi"] \arrow[d] & \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \\
H^+/\sim' \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}
$$



Per concludere, basta osservare che $H^+/\sim' \cong D^n/\sim$,

in quanto la mappa $H^+ \xrightarrow{g} D^n$, $g(x_0, \dots x_n) = (x_1, \dots x_n)$

(g è la proiezione di H^+ sull'iperpiano $x_0 = 0$)

induce un omeomorfismo $H^+/\sim' \to D^n/\sim$.

Infatti, g è un omeomorfismo (ha inversa continua

$g^{-1}: D^n \to H^+$, $g^{-1}(x_1 \dots x_n) = \left(\sqrt{1-(x_1^2 + \dots + x_n)^2}, x_1, \dots x_n\right)$),

per cui la composizione

$$H^+ \xrightarrow{g} D^n \xrightarrow{\pi} D^n/\sim$$

induce una mappa continua $\bar{g}: H^+/ \to D^n/$

induce una mappa continua $\bar{g} : H^+/_{\sim'} \to D^n/_{\sim}$

$$\begin{tikzcd} H^+ \arrow[r, "g"] \arrow[d] & D^n \arrow[r, "\pi"] & D^n/_{\sim} \\ H^+/_{\sim'} \arrow[urr, "\bar{g}"'] & & \end{tikzcd}$$

e analogamente, $D^n \xrightarrow{g^{-1}} H^+ \to H^+/_{\sim'}$

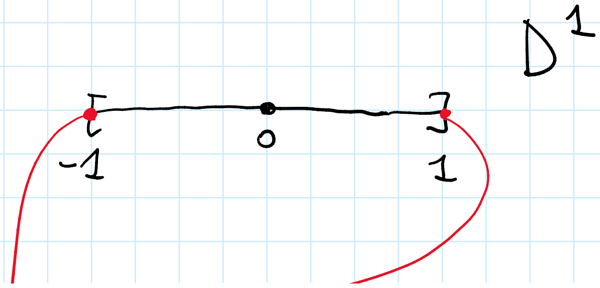
induce $\overline{g^{-1}} : D^n/_{\sim} \to H^+/_{\sim'}$ continua. Per costruzione, $\bar{g}$ e $\overline{g^{-1}}$ sono una l'inversa dell'altra e dunque sono omeomorfismi.

$\square$

Topologia dei proiettivi in dimensione bassa.

① $\mathbb{P}^0(\mathbb{R})$ è un punto.

② $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \cong D^1/_{\substack{v \sim \pm v \\ \text{se } \|v\|=1}}$

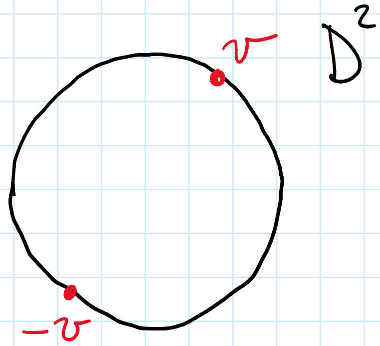


$\|v\|=1$

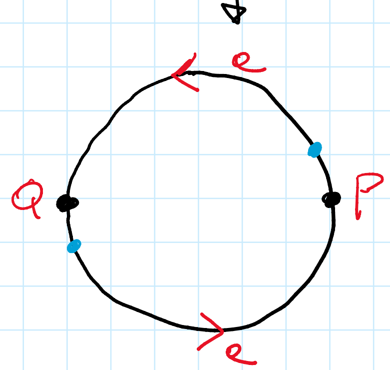
punti da identificare

Dunque $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \cong \dfrac{D^1}{\partial D^1} \cong S^1$.

③ $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ necessita di più lavoro. Lo studiamo (non troppo formalmente) tramite tecniche di "taglia e cuci".

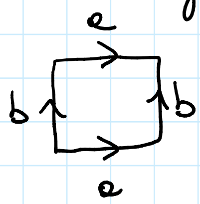


Possiamo rappresentare la rel. di equivalenza $v \sim w \iff$ $v = w$ o $(\|v\| = \|w\| = 1$ e $v = -w)$ con degli archi orientati su $\partial D^2 = S^1$

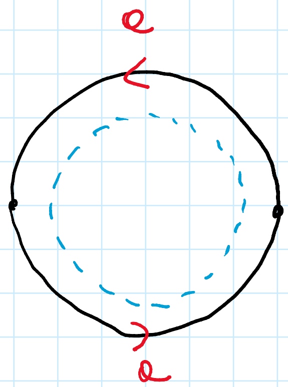


Cioè, i punti dell'arco $\widehat{PQ}$ "superiore" sono identificati ai punti dell'arco $\widehat{PQ}$ "inferiore" seguendo il verso $\xrightarrow{e}$

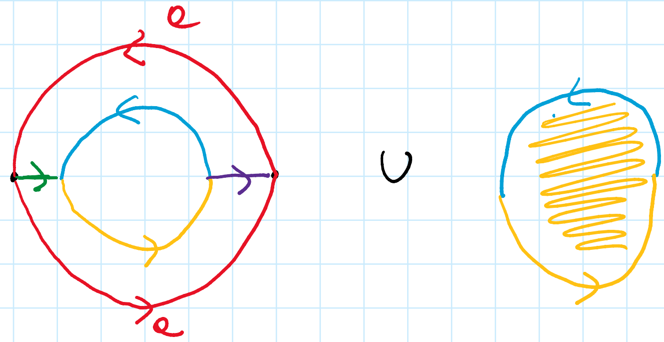
ai punti [illegible] arco [illegible] inferiore seguendo il verso

delle frecce (esattamente come 

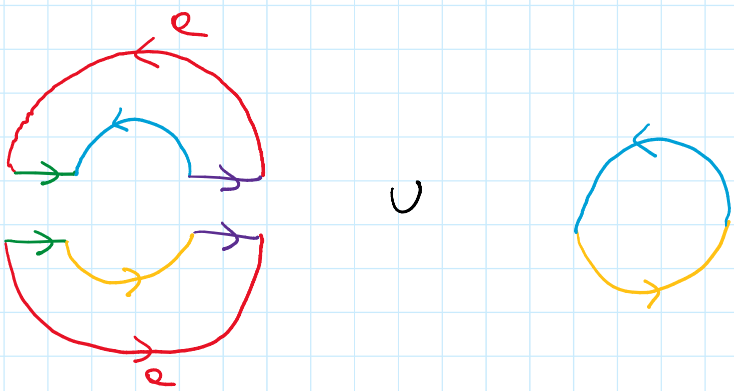
rappresenta $S^1 \times S^1$)

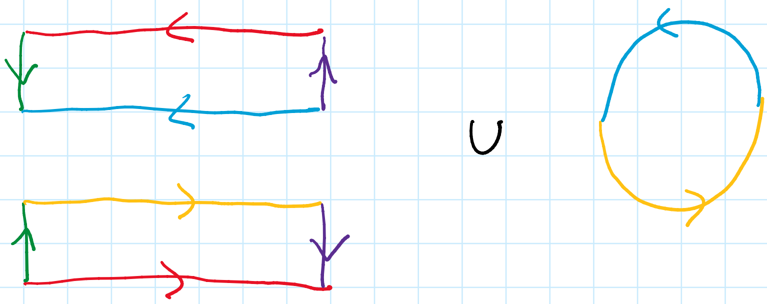


taglio un disco concentrico più piccolo



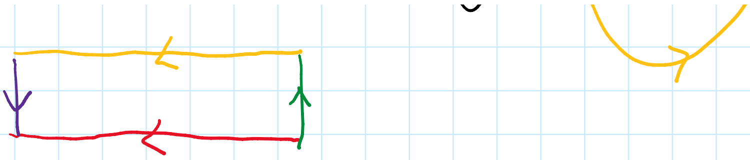
taglio lungo i segmenti verde e viola





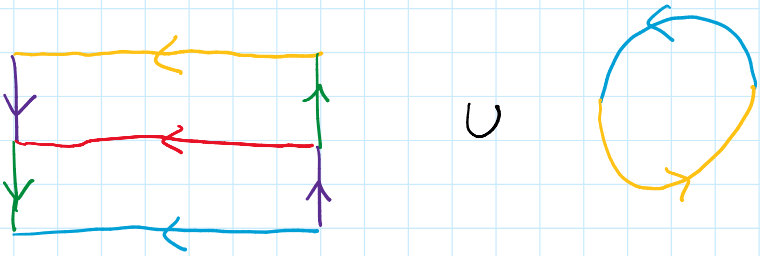
rifletto la striscia

strisce inferiore rispetto a un asse verticale

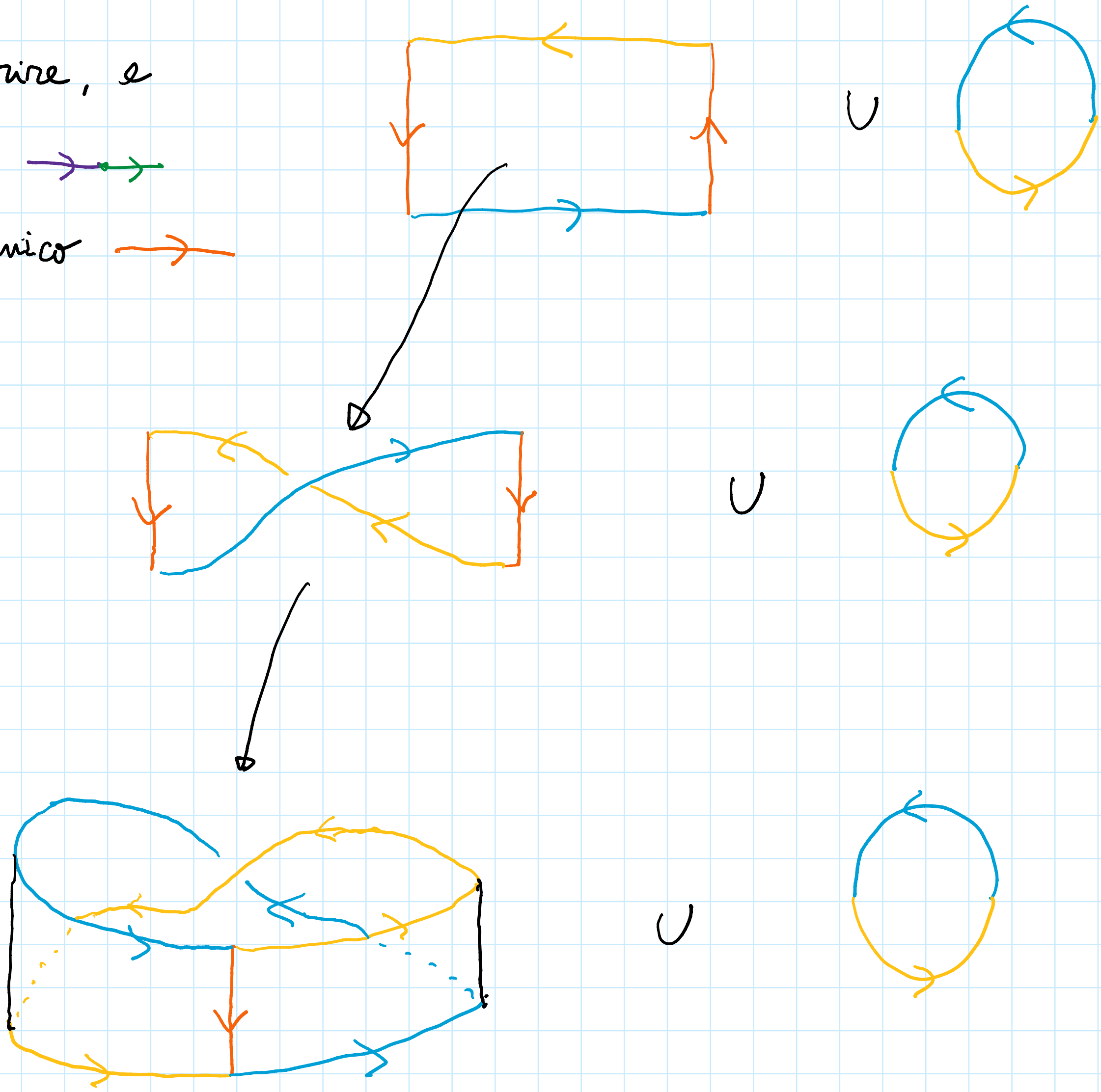


---

scambio le posizioni delle due strisce, e incollo l'arco rosso



L'arco rosso può sparire, e inglobo in un unico



NASTRO DI MOEBIUS

Dunque $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ si ottiene attaccando un disco (lungo il bordo) al bordo di un nastro di Moebius (bordo che consiste di una sola componente connessa, omeomorfo a $S^1 \cong \partial D^2$).

Si può dimostrare che in effetti $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ non è omeomorfo ad alcun sottospazio di $\mathbb{R}^3$.

$\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

Teorema: $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ è una varietà topologica di dimensione $2n$, compatta e connessa per archi.

Dim.: Identica al caso reale: ogni punto ha un intorno omeomorfo a $U_i \cong \mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$;

la proprietà T_2 e la connessione per archi si la proprietà T_2 e la connessione per archi si dimostrano nello stesso modo. Inoltre, se identifichiamo $\mathbb{C}^{n+1}$ con $\mathbb{R}^{2n+2}$, $\pi: \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ si restringe a una mappa surgettiva e continua

$$\pi_1 : S^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C}).$$

Poiché S^{2n+1} è compatto, segue che anche $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ lo è.

$\square$

In dimensione bassa, $\mathbb{P}^0(\mathbb{C})$ è un punto, e $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = U_0 \cup H_0$, dove U_0 è omeomorfo a $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, e $H_0 = \{x_0 = 0\} = \{[0:1]\}$ è un punto.

Dunque, poiché $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ è compatto e T_2, e $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{[0:1]\} \cong \mathbb{R}^2$, per unicità della compattificazione di Alexandroff, $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ è la compattificazione di Alexandroff di $\mathbb{R}^2$, clunque

$$\boxed{\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \cong S^2}$$