Enunciamo di nuovo, precisandolo, l'ultimo risultato di ieri, e concludiamone la dimostrazione. Ricordo preliminarmente che ieri abbiamo osservato che una base di una topologia ne è anche una prebase.

Prop.: $f: (X, \tau) \to (Y, \tau')$. Allora sono fatti equivalenti:

① f è continua

② $\exists$ base $\mathcal{B}$ di τ' t.c. $f^{-1}(B) \in \tau$ $\forall B \in \mathcal{B}$.

③ $\exists$ prebase $\mathcal{U}$ di τ' t.c. $f^{-1}(U) \in \tau$ $\forall U \in \mathcal{U}$.

Dim.: ① $\Rightarrow$ ② : OVVIO, anzi ① $\Rightarrow$ $\forall$ base $\mathcal{B}$ di τ' si ha $f^{-1}(B) \in \tau$ $\forall B \in \mathcal{B}$, in quanto gli elementi di una base sono aperti.

② $\Rightarrow$ ③: Se vale ②, la base $\mathcal{B}$ per cui ② vale è anche una prebase, e dunque vale ③.

② vale è anche una prebase, e dunque vale ③.

③ $\Rightarrow$ ②: Sia $\mathcal{U}$ una prebase di τ' t.c. $f^{-1}(U) \in \tau$ $\forall U \in \mathcal{U}$, e sia $\mathcal{B}$ la base associata al $\mathcal{U}$, i cui elementi sono le intersezioni finite di elementi di $\mathcal{U}$.

Se $B \in \mathcal{B}$, $\exists U_1, \dots, U_k \in \mathcal{U}$ con $B = \bigcap_{i=1}^{k} U_i$.

Ora $f^{-1}(B) = f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{k} U_i\right) = \bigcap_{i=1}^{k} f^{-1}(U_i) \in \tau$

in quanto ogni $f^{-1}(U_i)$ è aperto e intersezione finita di aperti è aperta.

② $\Rightarrow$ ① Sia $\mathcal{B}$ la base per cui vale ②, e sia $A \in \tau'$ un aperto generico di Y. Per definizione di base, $\exists \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ t.c. $A = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B$.

Ora $f^{-1}(A) = f^{-1}\left(\bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B\right) =$

$= \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} f^{-1}(B)$, che è aperta in quanto unione di aperti.

$\square$

Def.: Uno spazio topologico (X, τ) soddisfa il secondo assioma di numerabilità, e si dice II - numerabile, se τ ammette una base $\mathcal{B}$ (al più) numerabile.

Una vasta classe di esempi è fornita dal seguente teorema, che sfrutta un'altra nozione importante in topologia, quella di sottoinsieme denso.

Definizione: Sia X uno spazio topologico. Un sottoinsieme $Y \subseteq X$ è DENSO se $\overline{Y} = X$.

Osservazione: Un sottoinsieme $Y \subseteq X$ è denso $\iff$ $Y \cap A \neq \emptyset$ $\forall$ aperto A non vuoto di X.

(Fatelo per esercizio! Potrebbe essere utile il fatto già visto che $(X \setminus Y)^{\circ} = X \setminus \overline{Y}$).

Definizione: Uno spazio topologico X si dice SEPARABILE se ammette un sottoinsieme denso di cardinalità al più numerabile.

Esempio: $\mathbb{Q}^n$ è denso in $\mathbb{R}^n$ (è ovvio che un qualsiasi aperto non vuoto di $\mathbb{R}^n$, dovendo contenere una palla, interseca $\mathbb{Q}^n$). Dunque $\mathbb{R}^n$ è separabile. (D'ora in poi, quando dirò $\mathbb{R}^n$ senza specificarne la topologia, assumerò che sia quella Euclidea).

Teorema: Sia (X, d) uno spazio metrico. Allora X è a base numerabile $\Longleftrightarrow$ separabile.

Dim.: $\Longleftarrow$ Sia Y un sottoinsieme denso numerabile di X. Pongo

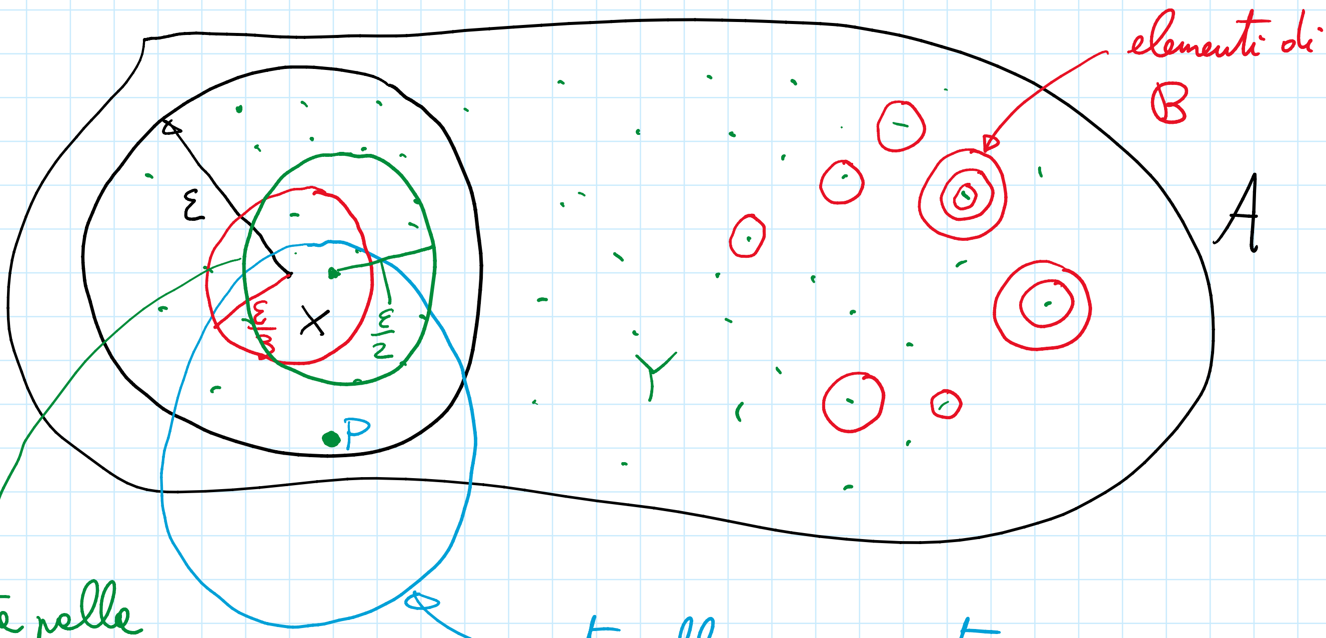
$$\mathcal{B} = \{ B(y,R), \quad y \in Y, \quad R \in \mathbb{Q}, R>0 \}.$$

La cardinalità di $\mathcal{B}$ è chiaramente numerabile

($\mathcal{B}$ è unione numerabile di insiemi numerabili, essendo Y e $\mathbb{Q}$ numerabili).

Basta mostrare che $\mathcal{B}$ è una base della topologia indotta da d. Sia perciò A un aperto generico di X. Devo esprimere A come unione di elementi di $\mathcal{B}$. Per farlo basta che dimostri che $\forall x \in A \ \exists B_x \in \mathcal{B}$ tale che $x \in B_x \subseteq A$ (così avrò $A = \bigcup_{x \in A} B_x$).

Poiché A è aperto, $\exists \varepsilon > 0$ t.c. $B(x, \varepsilon) \subseteq A$.



questa palla funziona: contiene x ed è contenuta in A

questa palla, per contenere x, esce da A: non va bene!

Poiché Y è denso, $Y \cap B(x, \frac{\varepsilon}{3}) \neq \emptyset$, per cui $\exists\, y \in Y$ con $d(x,y) < \frac{\varepsilon}{3}$. Ora prendo un razionale R con $\frac{\varepsilon}{3} < R < \frac{\varepsilon}{2}$ (esiste perché $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$, come visto ad Analisi I).

Dico che $B(y, R) \in \mathcal{B}$ è l'elemento B_x cercato, cioè $x \in B(y,R) \subseteq A$. Infatti,

$x \in B(y,R)$ poiché $d(x,y) < \frac{\varepsilon}{3}$ e $R > \frac{\varepsilon}{3}$

Inoltre, $\forall\, z \in B(y,R)$,

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < \frac{\varepsilon}{3} + R < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

per cui $B(y,R) \subseteq B(x,\varepsilon) \subseteq A$, da cui la tesi.

$\Longrightarrow$ Questa implicazione vale anche senza l'ipotesi che X sia metrico, come provato nella seguente proposizione.

$\square$

Proposizione: (X, τ) a base numerabile $\Longrightarrow (X,\tau)$

Proposizione: (X,τ) a base numerabile $\Rightarrow (X,\tau)$ separabile.

Dim.: Sia $\mathcal{B}$ una base (al più) numerabile.

$\forall B \in \mathcal{B}$, $B \neq \emptyset$, scegliamo $x_B \in B$ a caso.

Allora $Y = \{x_B,\ B \in \mathcal{B},\ B \neq \emptyset\}$ è denso.

Infatti, se A è aperto e non vuoto, per definizione di base $\exists \bar{B} \in \mathcal{B}$, $B \neq \emptyset$ con $\bar{B} \subseteq A$.

Dunque $x_{\bar{B}} \in A$, e $Y \cap A \neq \emptyset$.

$\square$

ESERCIZI

① Sia (X,d) uno spazio metrico. Si mostri che

$$\forall x \in X,\ R > 0,\quad \overline{B(x,R)} \subseteq \bar{B}(x,R),$$

e che l'uguaglianza non vale in generale.

$\left(\bar{B}(x,R) = \{ y \in X \text{ con } d(x,y) \leq R \} \right).$

Dim.: Si è già dimostrato che le palle chiuse sono effettivamente chiusi della topologia associata a d. Dunque $\overline{B}(x,R)$ è un chiuso che contiene $B(x,R)$. Per definizione di chiusura, segue che $\overline{B(x,R)} \subseteq \overline{B}(x,R)$.

Per trovare un controesempio all'uguaglianza, basta prendere X con almeno 2 elementi dotato della distanza discreta. Se $x \in X$,

$B(x,1) = \{x\}$, e $\overline{B(x,1)} = \{x\}$

(in X tutti i sottoinsiemi sono aperti e chiusi, per cui $\overline{Y} = Y \quad \forall\, Y \subseteq X$).

Invece, $\overline{B}(x,1) = X \neq \{x\}$.

Dunque $\overline{B(x,1)} \neq \overline{B}(x,1)$.

$\square$

(2) Siano $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{B} = \{[a,b),\ a,b \in \mathbb{R},\ a<b\}$.

(1) Si mostri che $\mathcal{B}$ è base di una topologia τ.

(2) Si mostri che τ è strettamente più fine della

② Si mostri che τ è strettamente più fine della usuale topologia Euclidea di $\mathbb{R}$.

③ Si dica se (X, τ) sia separabile.

④ Si dica se (X, τ) sia a base numerabile.

⑤ Si dica se (X, τ) sia metrizzabile.

(Uno spazio topologico (X, τ) è metrizzabile se τ è la topologia associata a una distanza su X).

Dim.: ① Usiamo un criterio visto in precedenza.

Bisogna vedere che $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$ e che $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}$

$B_1 \cap B_2 = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B$, per qualche $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$.

La prima condizione è ovviamente verificata:

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [n, n+1).$$

Anche la seconda condizione è ovvia: $\forall a, b, c, d$,

$$[a,b) \cap [c,d) = \begin{cases} [a,b) \\ [c,d) \\ [c,b) \\ \ldots \end{cases}$$

$$\begin{cases} [c,b) \\ [a,d) \\ \emptyset \end{cases}$$

a seconda di come sono ordinati a, b, c, d.

In ogni caso, $[a,b) \cap [c,d)$ è unione di elementi di $\mathcal{B}$ (in particolare, di 0 o 1 elemento).

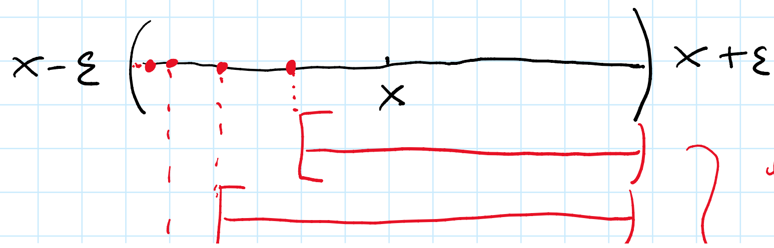
(2) Di sicuro $\mathcal{T} \neq \mathcal{T}_E$ topologia euclidea

perché ad esempio $[0,1) \in \mathcal{T}$, $[0,1) \notin \mathcal{T}_E$.

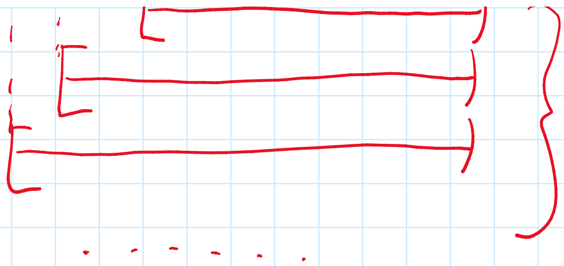
Vediamo $\mathcal{T}_E \subseteq \mathcal{T}$. Basta vedere che ogni palla euclidea è un aperto di $\mathcal{T}$, in quanto ogni aperto euclideo è unione di palle, e unione di aperti di $\mathcal{T}$ è un aperto di $\mathcal{T}$.

Ma, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$

$$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [x-\varepsilon+2^{-n}, x+\varepsilon) \in \mathcal{T}.$$



l'unione infinita



l'unione infinita di questi intervalli il cui estremo sinistro tende a $x-\varepsilon$ è $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$.

③ (X, τ) è separabile, in quanto $\mathbb{Q}$ è denso: se $A \in \tau$, $A \neq \emptyset$, per definizione di base $\exists\, a<b$ con $[a,b) \subseteq A$. Ora, $\exists\, q \in \mathbb{Q}$ con $a \leq q < b$ (Analisi I) $\Rightarrow A \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$.

④ (X, τ) non è a base numerabile. Dimostriamo che, se $\mathcal{B}'$ è una qualsiasi base di τ, $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists B_x \in \mathcal{B}'$ tale che $\inf B_x = x$. Ciò implica immediatamente che $\# \mathcal{B}' \geq \# \mathbb{R}$, e dunque τ non è a base numerabile.

(la funzione
$$\begin{aligned} \mathcal{B}' &\longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \\ B &\longmapsto \inf B \end{aligned}$$
ha immagine che contiene $\mathbb{R}$, dunque $\# \mathcal{B}' \geq \# \mathbb{R}$)

$\Big($ ha immagine che contiene $\mathbb{R}$, dunque $\# \mathcal{B}' \geq \# \mathbb{R} \Big)$

Infatti, dato $x \in \mathbb{R}$, l'insieme $[x, x+1)$ è aperto, dunque per definizione di base, $\exists$ sottofamiglia $C \subseteq \mathcal{B}'$ tale che

$$[x, x+1) = \bigcup_{B \in C} B$$

In particolare, $\exists \overline{B} \in C$ con $x \in \overline{B}$; inoltre tale $\overline{B}$ deve essere contenuto in $[x, x+1)$.

Dunque necessariamente $\inf \overline{B} = \min \overline{B} = x$.

Questo prova (4).

(5) (X, τ) non è metrizzabile. Se lo fosse, essendo separabile dovrebbe essere a base numerabile.

Corollario del Teorema visto prima: $\forall n \geq 1$, $\mathbb{R}^n$ con la topologia Euclidea è a base numerabile, essendo metrizzabile e separabile.

Fatto: la topologia τ introdotta nell'esercizio precedente si chiama RETTA DI SORGENFREY.

③ Siano $X = \mathbb{R}$, $\tau = \{(a, +\infty),\ a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}\}$

① Si mostri che τ è una topologia, detta DELLA SEMICONTINUITÀ INFERIORE.

② Si dica se (X, τ) sia a base numerabile.

③ Si mostri che $f: (X, \tau_E) \to (X, \tau)$ è continua $\Longleftrightarrow$ f è semicontinua inferiormente, cioè se $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tale che

$$f(x') > f(x) - \varepsilon \qquad \forall\ x' \in (x-\delta, x+\delta).$$

④ Chi sono le funzioni continue $f: (X, \tau) \to (X, \tau_E)$?

Hints:

1. Banali controlli
2. Usare $\mathbb{Q}$!
3. Facile controllo.
4. Sono pochissime !