giovedì 22 ottobre 2020 09:02

Ordinamento su topologie.

Def.: X insieme, τ, τ' topologie su X. Allora τ si dice MENO FINE di τ' se $\tau \subseteq \tau'$ (ricordiamo $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$, $\tau' \subseteq \mathcal{P}(X)$).

Equivalentemente, τ è meno fine di τ' se e solo se $Id: (X, \tau') \to (X, \tau)$ è continua.

In questi casi scriveremo $\tau < \tau'$.

$<$ è una relazione d'ordine ($\tau = \tau' \iff \tau < \tau'$ e $\tau' < \tau$ e vale banalmente la proprietà transitiva) PARZIALE: date topologie τ, τ' su X, può darsi che $\tau \nless \tau'$ e $\tau' \nless \tau$; in tal caso le topologie non sono confrontabili.

Esempi: ① $X = \{a, b\}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, X\}$

$\mathcal{T}' = \{\emptyset, \{b\}, X\}$

sono topologie non confrontabili.

② Siano d, d' distanze su X. Se $\exists\, k>0$ tale che $\boxed{d \le k d'}$ (cioè $d(x,y) \le k d'(x,y)$ $\forall\, x, y \in X$), allora $\mathcal{T}_d < \mathcal{T}_{d'}$ (si veda la dimostrazione che distanze bilipschitz equivalenti inducono la stessa topologia).

③ Su $\mathbb{R}^n$, $n \ge 1$, la topologia Euclidea è strettamente più fine della topologia cofinita. Basta vedere che i chiusi della cofinita sono chiusi rispetto alla topologia Euclidea, il che è ovvio.

④ La topologia <u>DISCRETA</u> è sempre la topologia più fine su X, quella <u>INDISCRETA</u> la meno fine.

fine.

(5) Ricordiamo le distanze d_1 e d_∞ su

$$C^0([0,1],\mathbb{R}) = \{ f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f \text{ continue} \}$$

$$d_1(f,g) = \int_0^1 |f(t)-g(t)|\,dt$$

$$d_\infty(f,g) = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)-g(t)|.$$

Allora, se τ_1 e τ_∞ sono le topologie indotte, $\tau_1 < \tau_\infty$ e $\tau_1 \neq \tau_\infty$ (cioè τ_1 è strettamente meno fine di τ_∞). Ciò contrasta con quanto accade in $\mathbb{R}^n$, dove d_1 e d_∞ sono topologicamente equivalenti. Vedremo che su spazi vettoriali di dimensione finita tutte le norme inducono distanze topologicamente equivalenti, mentre in dimensione infinita ciò è falso.

$\tau_1 < \tau_\infty$: Basta vedere che $d_1 \leq d_\infty$:

$$d_1(f,g) = \int_0^1 |f(t)-g(t)|\,dt \leq \int_0^1 d_\infty(f,g)\,dt =$$

$$= d_\infty(f,g).$$

$\tau_1 \neq \tau_\infty$: Esibisco un aperto di τ_∞ che non è aperto per τ_1. Sia $A = B_{d_\infty}(0, 1) =$

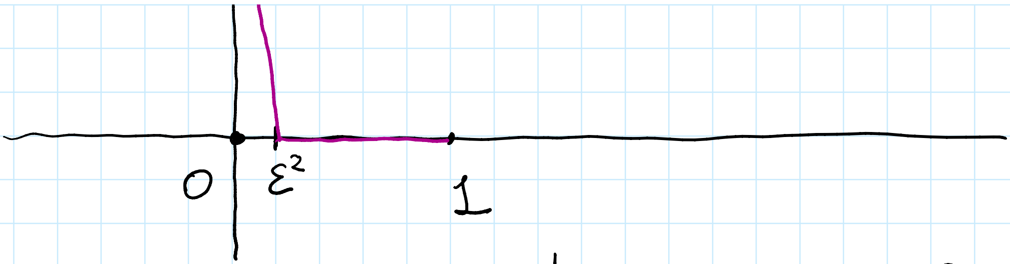
funzione identicamente nulla

$$= \left\{ f : [0,1] \to \mathbb{R} : \max_{t\in[0,1]} |f(t) - 0| < 1 \right\} =$$

$$= \left\{ f : [0,1] \to \mathbb{R} : \max_{t\in[0,1]} |f(t)| < 1 \right\}.$$

Le palle aperte di d_∞ sono aperti di τ_∞, per cui $A \in \tau_\infty$.

Se fosse un aperto di τ_1, esisterebbe $\varepsilon > 0$ tale che $B_{d_1}(0, \varepsilon) \subseteq A$. Tuttavia, dato $\varepsilon > 0$, la funzione f_ε con grafico VIOLA



soddisfa $d_1(f_\varepsilon, 0) = \int_0^1 |f_\varepsilon(t)|\,dt = \frac{\varepsilon^2 \cdot \frac{1}{\varepsilon}}{2} = \frac{\varepsilon}{2}$

ma $d_\infty(f_\varepsilon, 0) = \frac{1}{\varepsilon}$, per cui se $\varepsilon < 1$

abbiamo $f_\varepsilon \in B_{d_1}(0, \varepsilon)$ ma $f_\varepsilon \notin A$.

Data l'arbitrarietà di ε, ciò mostra che A non è aperto per T_1.

(6) Ex.: La topologia di Zariski su $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, è strettamente meno fine di quella Euclidea.

BASI e PREBASI di TOPOLOGIE.

Sia X un insieme, e sia $S \subseteq \mathcal{P}(X)$. Vogliamo definire la topologia "generata" da S, cioè la

cioè, meno fine

più piccola topologia che contiene S. A questo scopo più piccola topologia che contiene S. A questo scopo

è utile la seguente:

Proposizione: Sia $\mathcal{T}_i$, $i \in I$ una famiglia di topologie su X. Allora $\mathcal{T} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{T}_i$ è una topologia su X.

Dim.: Devo vedere che $\mathcal{T}$ verifichi gli assiomi:

1. $\phi \in \mathcal{T}_i \ \forall i \implies \phi \in \mathcal{T}$;

   $X \in \mathcal{T}_i \ \forall i \implies X \in \mathcal{T}$.

2. Se $A, B \in \mathcal{T}$, allora $A \in \mathcal{T}_i$, $B \in \mathcal{T}_i$ $\forall i \in I$.

   Poiché le $\mathcal{T}_i$ sono topologie, $A \cap B \in \mathcal{T}_i$ $\forall i \in I$.

   Dunque $A \cap B \in \mathcal{T}$.

3. Se $A_\alpha \in \mathcal{T}$ $\forall \alpha \in \Omega$, $A_\alpha \in \mathcal{T}_i$ $\forall i \in I, \forall \alpha \in \Omega$.

   Dunque, poiché ciascuna $\mathcal{T}_i$ è una topologia,

   $\forall i \in I \quad \bigcup_{\alpha \in \Omega} A_\alpha \in \mathcal{T}_i$, dunque $\bigcup_{\alpha \in \Omega} A_\alpha \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{T}_i = \mathcal{T}$.

$\square$

Corollario: Dato $S \subseteq \mathcal{P}(X)$, esiste la topologia meno fine che contiene S, che chiameremo "topologia generata da S".

Dim.: la topologia discreta contiene S, per cui l'insieme $\Lambda = \{\tau \text{ topologia su } X, \ S \subseteq \tau\}$ è non vuoto. Pongo $\overline{\tau} = \bigcap_{\tau \in \Lambda} \tau$.

Per la proposizione precedente, $\overline{\tau}$ è una topologia su X, e chiaramente è la "più piccola" (cioè la meno fine) tra le topologie che contengono S, in quanto se τ è una topologia con $S \subseteq \tau$, allora $\tau \in \Lambda$ e per costruzione $\overline{\tau} \subseteq \tau$.

Definizione: Sia τ una topologia su X. Una BASE di τ è una famiglia $\mathcal{B} \subseteq \tau$ (dunque una famiglia di aperti di τ) tale che ogni $A \in \tau$ sia esprimibile come unione di elementi di $\mathcal{B}$, cioè sia esprimibile come unione di elementi di $\mathcal{B}$, cioè

$$\forall A \in \tau \quad \exists \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B} \text{ t.c. } A = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B.$$

Esempio: Se d è una distanza su X, una base $\mathcal{B}$ della topologia indotta τ_d è

$$\mathcal{B} = \{ B(x,r),\ x \in X,\ r > 0 \}.$$

Infatti, sappiamo che $\mathcal{B} \subseteq \tau_d$. Inoltre, se A è aperto, per definizione $\forall x \in A$ $\exists r_x > 0$ t.c. $B(x, r_x) \subseteq A$. Dunque

$$A = \bigcup_{x \in A} B(x, r_x)$$

ciascun $B(x, r_x)$ appartiene a $\mathcal{B}$

(le due inclusioni sono a questo punto ovvie).

Proposizione: Sia $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Allora $\mathcal{B}$ è base di una topologia su X se e solo se:

① $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$

② $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B} \quad \exists \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ tale che

② $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}, \quad \exists \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ tale che

$$B_1 \cap B_2 = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B.$$

(Dunque, dato $S \subseteq \mathcal{P}(X)$ arbitrario, S genera una topologia, ma non è detto che S sia base di qualche topologia).

Dim.: $\Longrightarrow$ Se $\mathcal{B}$ è base di una topologia τ, poiché $X \in \tau$, e X deve essere unione di elementi di $\mathcal{B}$, deve valere ①. Inoltre, poiché $\mathcal{B} \subseteq \tau$, dati $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ si ha $B_1 \cap B_2 \in \tau$, da cui ② per definizione di base.

$\Longleftarrow$ Definisco τ ponendo $A \in \tau \iff \exists \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ t.c. $A = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B$. Bisogna vedere che τ è una topologia. È facile, fatelo come esercizio! (Ovviamente bisogna usare ① e ②).

Definizione: Un sottoinsieme $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$ è una

PREBASE di una topologia τ su X se le intersezioni finite di elementi di $\mathcal{U}$ danno una base di τ, cioè se, posto

$$\mathcal{B} = \{ U_{i_1} \cap U_{i_2} \cap \ldots \cap U_{i_n} , \quad U_{i_j} \in \mathcal{U}, \quad n \in \mathbb{N} \}$$

è una base di τ.

<u>Teorema</u>: τ topologia su X, $S \subseteq \mathcal{P}(X)$.
Allora τ è generata da $S \iff S \cup \{X\}$ è una prebase di τ.
In particolare, si può descrivere la topologia generata da S come segue: gli aperti della topologia si ottengono come unioni arbitrarie di intersezioni finite di elementi di S (+ tutto X, se non emerge già).

$\implies$ Sia τ la topologia generata da S.
Per definizione, $S \subseteq \tau$, e per gli assiomi di topologia

$X \in \tau$, per cui $S \cup \{X\} \subseteq \tau$. Sia

$\mathcal{B} = \{$intersezioni finite di elementi di $S \cup \{X\}\}$.

Per gli assiomi di topologia, $S \cup \{X\} \subseteq \tau \Rightarrow \mathcal{B} \subseteq \tau$.

Mostriamo che $\mathcal{B}$ è base di una topologia τ'.

Dobbiamo verificare che $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$, il che è chiaro

in quanto $X \in \mathcal{B}$ essendo intersezione finita (di un

solo elemento!) di elementi di $S \cup \{X\}$; e che se $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$

allora $B_1 \cap B_2 = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B$. Ma per definizione

$B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$ (in quanto intersezione di due intersezioni

finite è essa stessa un'intersezione finita). Dunque

$\mathcal{B}$ è base di una topologia τ'. Poiché $\mathcal{B} \subseteq \tau$,

e τ è una topologia, per gli assiomi di topologia unioni

di elementi di $\mathcal{B}$ devono stare in τ, per cui $\tau' \subseteq \tau$.

Inoltre, τ' contiene S per costruzione, per cui,

essendo τ la topologia meno fine che contiene S, vale anche $\tau \subseteq \tau'$. Dunque $\tau = \tau'$, che è la tesi.

$\Longleftarrow$ Esercizio (è l'implicazione meno interessante e meno utile).

Prop.: $f: (X, \tau) \to (Y, \tau')$ funzione tra spazi topologici. Allora sono fatti equivalenti:

① f è continua

② $f^{-1}(A) \in \tau \quad \forall A \in \mathcal{B}$, dove $\mathcal{B}$ è una fissata base di τ'

③ $f^{-1}(A) \in \tau \quad \forall A \in \mathcal{U}$, dove $\mathcal{U}$ è una fissata prebase di τ'.

Cioè, si può verificare la continuità sugli elementi di una base o di una prebase.

Dim.: ① $\Longrightarrow$ ② e ③ in quanto gli elementi di una base o di una prebase di τ' sono aperti di τ'.

Inoltre, una base per τ' è anche una prebase di τ':

infatti, è chiaro che $\mathcal{T}'$ è la più piccola topologia che contiene $\mathcal{B} \cup \{X\}$, in quanto è una topologia, e ogni topologia che contenga $\mathcal{B} \cup \{X\}$ deve contenere tutte le unioni arbitrarie di elementi di $\mathcal{B} \cup \{X\}$, e deve perciò contenere $\mathcal{T}'$! Dunque per concludere basta vedere (3) $\Rightarrow$ (1).