

Università di Pisa
Dipartimento di Matematica
Corsi di Laurea e di Laurea Magistrale in Matematica
Anno accademico 2014/2015
Scheda di un insegnamento attivato

Ultrafiltri e Metodi Nonstandard (UMN)
Mauro Di Nasso – dinasso@dm.unipi.it

Codice dell'insegnamento: 230AA
Valore in CFU: 6
Settore scientifico-disciplinare:
Numero di ore di didattica frontale: 48
Semestre di svolgimento: II
Sito web dell'insegnamento: <http://www.dm.unipi.it/~dinasso/didattica.html>

Università di Pisa
Dipartimento di Matematica
Corsi di Laurea e di Laurea Magistrale in Matematica
Anno accademico 2014/2015
Informazioni su un insegnamento attivato

Nome dell'insegnamento: Ultrafiltri e Metodi Nonstandard (UMN)

Docente titolare: Mauro Di Nasso

Programma previsto:

Parte 1: Ultrafiltri. Filtri e ultrafiltri. Prodotto tensore tra ultrafiltri. Limiti in topologia lungo ultrafiltri e relativa caratterizzazione della compattezza. Teorema dei tre colori (se $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ non ha punti fissi, allora esiste una 3-colorazione tale che n ed $f(n)$ hanno sempre colori diversi). Immagini di ultrafiltri, isomorfismo tra ultrafiltri, preordine di Rudin-Keisler. Lo spazio topologico $\beta\mathbb{N}$ degli ultrafiltri su \mathbb{N} come compattificazione di Stone-Cěch dello spazio discreto \mathbb{N} . Ultrafiltri selettivi e ultrafiltri P-points.

Parte 2: Combinatoria dei numeri. Teorema di Ramsey finito e infinito. Insiemi di somme e di differenze. Teorema combinatorio di Schur, ed esistenza di soluzioni non banali all'equazione di Fermat per campi finiti sufficientemente grandi. Principio di compattezza combinatoria. La pseudo-somma in $\beta\mathbb{N}$ e relativa struttura di semigruppato topologico destro compatto. Teorema di Ellis e esistenza di ultrafiltri idempotenti. Teorema di Hindman additivo e moltiplicativo. Versione simultaneamente additiva e moltiplicativa del Teorema di Hindman. Ideali sinistri in $\beta\mathbb{N}$. Ideali minimali ed ultrafiltri minimali. L'ideale bilatero minimo K . Un insieme che appartiene ad un ultrafiltro minimale contiene progressioni aritmetiche arbitrariamente lunghe. Teorema di van der Waerden. Regolarità per partizione debole e forte e relative caratterizzazioni mediante ultrafiltri.

Parte 3: Analisi nonstandard. Introduzione all'analisi nonstandard. Campi super-reali, numeri infinitesimi ed infiniti, parte standard di un numero finito. Costruzione di ultraprodotto. Numeri iperreali come ultrapotenza dei reali. Numeri ipernaturali, iperrazionali, ecc. La mappa $*$ (estensione nonstandard) e il principio di transfer. Esempi di uso dell'analisi nonstandard

per la dimostrazione di alcuni risultati fondamentali del calcolo: Teorema di Heine-Cantor, Teorema di Weierstrass, regola di Leibniz. Insiemi interni, proprietà di overspill, underspill e saturazione. Insiemi iperfiniti.

Parte 4: Applicazioni in teoria combinatoria dei numeri. Densità asintotica inferiore e superiore. Insieme spesso, sindetico, sindetico a tratti. Se un insieme A ha densità positiva, allora l'insieme di differenze $A - A$ incontra ogni insieme $X - X$ con X infinito, e in particolare è sindetico. Gli insiemi sindetici a tratti sono regolari per partizione. Caratterizzazioni nonstandard degli insiemi spessi, sindetici, sindetici a tratti. Insiemi additivamente grandi, insiemi AP-rich (cioè contenenti progressioni aritmetiche arbitrariamente lunghe) e loro regolarità per partizioni. Relazione di finita immergibilità tra insiemi di interi, e relative proprietà. Lemma di Fekete, densità di Banach e sua caratterizzazione nonstandard. Teorema di Jin: l'insieme somma $A + B$ di due insiemi con densità di Banach positiva è sindetico a tratti (dimostrazione nonstandard). Ultrafiltri generati da numeri ipernaturali e la relativa mappa tra ${}^*\mathbb{N}$ e $\beta\mathbb{N}$. Dimostrazione nonstandard che il centro di $\beta\mathbb{N}$ contiene solo gli ultrafiltri principali. Sistemi dinamici discreti, punti di ricorrenza, di uniforme ricorrenza. Teorema di Birkhoff. Il sistema dinamico $(\beta\mathbb{N}, S)$ dove $S : \beta\mathbb{N} \rightarrow \beta\mathbb{N}$ è l'operatore "shift". Gli ultrafiltri minimali sono i punti di uniforme ricorrenza di $(\beta\mathbb{N}, S)$. Caratterizzazione nonstandard della regolarità per partizione di equazioni. Dimostrazione nonstandard del teorema di Rado sulla regolarità per partizione di equazioni diofantee lineari. Il caso non lineare. Discussione di problemi aperti.

Testi consigliati: W. Comfort, S. Negropontis, *The Theory of Ultrafilters*, Springer-Verlag; V. Bergelson, *Ergodic Ramsey Theory – an update*, in "Ergodic Theory of \mathbb{Z}^d -actions" (M. Pollicott and K. Schmidt eds.), London Math. Soc. Lecture Note Series 228 (1996), pp. 1-61; R. McCutcheon, *Elemental Methods in Ergodic Ramsey Theory*, Springer; I. Protasov, *Combinatorics of Numbers*, VNTL Publishers; R. Goldblatt, *Lectures on the Hyperreals*, Springer.

Modalità d'esame: Risoluzione di esercizi assegnati durante il corso, seminario su argomento concordato, colloquio orale finale solo sugli argomenti non già coperti dagli esercizi svolti e dal seminario.

Altre informazioni: A seconda degli interessi degli studenti, lo sviluppo del programma potrà concentrarsi su alcuni degli argomenti previsti a scapito di altri.