I NUMERI INFINITESIMI E L'ANALISI NONSTANDARD

MAURO DI NASSO

Introduzione

Nell'*analisi infinitesimale* contemporanea, i numeri infinitesimi non esistono. Storicamente non sempre è stato così. Prima della ricerca fondazionale che portò alla attuale formalizzazione del concetto di numero reale alla fine del XIX secolo, l'uso diretto di quantità infinitesime è stato pratica comune per secoli. Anzi, fu proprio grazie alla manipolazione di quelle "quantità evanescenti" che vennero scoperti molti teoremi fondamentali dell'analisi. Recentemente, all'inizio degli anni Sessanta, il logico matematico Abraham Robinson ha introdotto l'*analisi nonstandard*. Facendo uso della teoria dei modelli, Robinson è riuscito a porre su basi rigorose l'uso dei numeri infinitesimi, dando così una possibile soluzione ad un problema storico. L'analisi nonstandard ha interessanti conseguenze in diversi ambiti. Essa consente di rileggere sotto una nuova prospettiva alcuni aspetti della storia del calcolo, spesso presentati assumendo come necessariamente contraddittorio l'uso delle quantità infinitesime. Più in generale, nell'ambito dell'epistemologia e della filosofia della matematica, i risultati fondazionali di Robinson possono fornire un contributo alla classica discussione sul tema dell'infinito. Nella ricerca, i metodi nonstandard sono stati usati in diverse aree della matematica pura e applicata, portando ad interessanti risultati. Infine l'analisi nonstandard offre spunti rilevanti anche dal punto vista didattico. I numeri infinitesimi ed i loro reciproci infiniti permettono infatti di formalizzare le idee di numero "piccolo" e di numero "grande". Di conseguenza, le nozioni fondamentali del calcolo sono formulabili in termini più semplici e più vicini all'intuizione.

1. Alcuni cenni storici

Già agli albori della antica civiltà greca ed ellenistica, il problema delle quantità infinitesime – collegato al concetto di continuità e di moto – fu un tema centrale della discussione matematico-filosofica (si pensi ai paradossi di Zenone). Euclide nei suoi *Elementi*, datati attorno al 300 A.C., dimostra di essere già consapevole del problema dell'infinitamente piccolo. Nel libro dedicato alla teoria delle proporzioni, si legge la seguente definizione:[1]

> Si dice che hanno fra loro rapporto le grandezze le quali possono, se moltiplicate, superarsi reciprocamente. (Euclide, *Gli elementi*, Libro V, Definizione IV)

Si osservi che l'esistenza di grandezze omogenee che *non* hanno rapporto equivale all'esistenza di grandezze una *infinitesima* rispetto all'altra. Al grandissimo Archimede (287–212 A.C.) era ben nota l'importanza *euristica* delle quantità infinitesime, cioè il loro uso come potente strumento di scoperta matematica. Una

[1] La traduzione è tratta dall'edizione [3].

volta “divinate” le giuste conclusioni, egli provvedeva poi a darne una dimostrazione rigorosa con il cosiddetto metodo di *esaustione*.[2]

Tradizionalmente, l'analisi matematica moderna ha inizio con i metodi elaborati indipendentemente da Isaac Newton (1643–1727) e da Gottfried Leibniz (1646–1716). Quest'ultimo faceva un uso diretto dei numeri infinitesimi. Ad esempio, è dovuta a lui la familiare notazione differenziale df/dx che si basa sulla nozione di incremento infinitesimo. Molti dei teoremi fondamentali del calcolo vennero inizialmente giustificati mediante un esplicito uso di quantità infinitesime.

Accanto all'entusiasmo suscitato dagli straordinari risultati che venivano raggiunti, cominciò presto a diffondersi la preoccupazione che quella nuova matematica fosse costruita su basi logiche molto dubbie. Il filosofo George Berkeley (1685–1753) rese esplicito quel fermento critico sui fondamenti dell'analisi, giungendo a definire gli infinitesimi “spettri di quantità morte”. Per capire come si usava ragionare all'epoca, citiamo Leonhard Euler (1707–1783), che insieme ad Archimede e Gauss è tradizionalmente considerato il più grande matematico della storia.[3]

> i differenziali ... essendo privi di quantità, sono anche detti infinitesimi e, per la loro natura sono da interpretarsi come del tutto nulli o uguali a zero. Così se alla quantità x si attribuisce un incremento ω, di modo che diventi $x+\omega$, il suo quadrato xx diventerà $xx+2x\omega+\omega\omega$, e dunque subirà l'incremento $2x\omega+\omega\omega$, perciò l'incremento della x, che è ω, starà all'incremento del quadrato, che è $2x\omega+\omega\omega$ come 1 sta a $2x+\omega$; il quale rapporto diventa di 1 a $2x$ soltanto nel momento in cui ω svanisce. Sia dunque $\omega = 0$ e il rapporto di questi incrementi evanescenti, che è la sola cosa che si considera nel calcolo differenziale, è quello di 1 a $2x$. (L. Euler, *Institutiones calculis differentialis*, 1755)

In breve, se f è la funzione “quadrato”, x è un punto fissato, e ω denota un incremento infinitesimo, il ragionamento di sopra può essere riassunto così:

$$f'(x) = \frac{(x+\omega)^2 - x^2}{\omega} = \frac{x^2 + 2x\omega + \omega^2 - x^2}{\omega} = \frac{\omega(2x+\omega)}{\omega} = 2x + \omega = 2x.$$

Berkeley puntò polemicamente il dito sulla contraddittorietà di un tale tipo di ragionamento dove in un primo momento si suppone $\omega \neq 0$ (altrimenti il rapporto incrementale non è definito), e in un secondo momento si ”trascura” ω uguagliandolo a zero. Dunque l'incremento infinitesimo ω è considerato allo stesso tempo diverso da zero ed uguale a zero. E si merita perciò l'appellativo di “spettro di quantità morte”!

Fu solo nella seconda metà dell'Ottocento che Karl Weiestrass introdusse la cosiddetta formalizzazione ε-δ, quella attualmente seguita. Finalmente il calcolo aveva solide basi, ma il prezzo pagato fu quello di bandire completamente i numeri infinitesimi ed infiniti dall'analisi. A partire dall'inizio del Novecento, inesorabilmente si diffuse tra i matematici la comune opinione secondo la quale, per usare le parole di Bertrand Russell, “gli infinitesimi ... devono essere considerati non necessari, erronei e auto-contraddittori”.

Nella formalizzazione di Weierstrass, l'indispensabile concetto intuitivo di numero “piccolo” viene introdotto in modo indiretto, mediante la nozione di funzione infinitesima. L'intero sviluppo della teoria del calcolo differenziale ed integrale si

[2] Sul valore del pensiero scientifico greco del periodo ellenistico, consigliamo vivamente la lettura del libro di Lucio Russo [8].

[3] Per correttezza storica, è bene precisare che la citazione qui riportata è posteriore di alcuni anni alla critica di Berkeley. Tuttavia non ne è in alcun modo influenzata, e riproduce in modo esemplare un modo di argomentare molto diffuso in tutto il XVIII secolo.

basa sul concetto di limite, ed è noto agli insegnanti quanto risulti difficoltoso per gli studenti un pieno apprendimento di quella definizione. C'è una famosa frase attribuita al grande matematico von Neumann: "Nella matematica le cose non si capiscono. Semplicemente ci si abitua". Fuor di battuta, acquisire familiarità con il metodo ε-δ spesso richiede un processo di "adattamento". Ciò non deve meravigliare, perché sono coinvolte formule oggettivamente difficili, in cui compaiono tre quantificazioni alternate (per ogni - esiste - per ogni). Chi fosse convinto che la definizione di continuità non è poi così complicata perché corrisponde in modo diretto ad un'idea intuitiva, non avrà difficoltà a risolvere prontamente il seguente:

Indovinello. *Qual è il significato di questa definizione?*

$$\textit{Per ogni } \varepsilon > 0 \textit{ esiste } \delta > 0 \textit{ tale che per ogni } x$$
$$\textit{se } x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon \textit{ allora } f(x_0) - \delta < f(x) < f(x_0) + \delta.$$

No, non ci sono errori di stampa. I simboli ε e δ hanno posizione scambiata rispetto alla definizione di continuità. Provate a proporre a bruciapelo questo indovinello ai vostri studenti ed anche ai vostri colleghi. Se vi capiterà quello che è successo a me, avrete spesso come risposta silenzi imbarazzati e interpretazioni sbagliate. Eppure la complessità di quella formula è esattamente la stessa della familiare definizione di continuità. Perché dunque non risulta altrettanto facile capirla? Lascio la risposta al lettore.

2. Campi non-archimedei

Un modo veloce (e rigoroso) di introdurre i numeri reali consiste in una presentazione assiomatica come *campo ordinato completo*.[4]

Definizione 2.1. Un campo ordinato $\mathbb{R}$ si dice *campo dei numeri reali* se gode della proprietà di *completezza*: "ogni sottoinsieme non vuoto $X \subset \mathbb{R}$ superiormente limitato ammette estremo superiore".

Dopo aver familiarizzato con la proprietà di completezza, un percorso didattico potrebbe prevedere lo studio dei numeri infinitesimi ed infiniti nei campi non-archimedei.

Definizione 2.2. Un elemento ε di un campo ordinato si dice *numero infinitesimo* se per ogni naturale positivo n, si ha $-1/n < \varepsilon < 1/n$. Un campo ordinato si dice *archimedeo* se per ogni $x > 0$, esiste un numero naturale n tale che $n > x$.

Si osservi che un campo ordinato è non-archimedeo se e solo se contiene numeri infinitesimi diversi da zero, e che ogni campo ordinato che include strettamente il campo dei numeri reali è necessariamente non-archimedeo. È importante notare che i campi non-archimedei *non* soddisfano la proprietà di completezza (l'insieme degli infinitesimi è limitato superiormente ma non ammette sup).

Un esempio di campo non-archimedeo è dato dalle *funzioni razionali fratte*, cioè del tipo $f(x) = P(x)/Q(x)$, dove $P(x)$ e $Q(x) \neq 0$ sono funzioni polinomiali a coefficienti reali. Poniamo:

$$f \prec g \quad \text{se } f(x) < g(x) \textit{ definitivamente},$$

cioè se esiste M tale che per ogni $x > M$, si abbia $f(x) < g(x)$. Allora vale la

[4]In una trattazione scolastica, puó essere conveniente rimandare (o addirittura omettere) il problema dell'esistenza e dell'unicità dei numeri reali.

Proposizione 2.3. *Il campo delle funzioni razionali fratte con l'ordinamento $\prec$ è un campo non-archimedeo che estende il campo ordinato dei numeri reali $\mathbb{R}$.*

Si osservi che in questo campo tutte le funzioni del tipo $f(x) = 1/x^n$ sono infinitesimi positivi. Supponiamo ora di aver fissato un qualunque campo ordinato che estende $\mathbb{R}$.

Definizione 2.4. Un numero ξ si dice *limitato* o *finito* se esiste un naturale n tale che $-n < \xi < n$. Un numero ξ si dice *illimitato* o *infinito* in caso contrario.

Chiaramente tutti i numeri infinitesimi e tutti i numeri reali sono limitati. Ma ci sono numeri che non sono né infinitesimi né reali (ad esempio $1 + \varepsilon$ con $\varepsilon \neq 0$ infinitesimo). A partire dalle definizioni, si possono dimostrare facilmente alcune fondamentali proprietà relative agli "ordini di grandezza" dei numeri rispetto alle operazioni di campo. Ad esempio, un numero $\varepsilon \neq 0$ è infinitesimo se e solo se il suo reciproco $1/\varepsilon$ è infinito; se ξ e ζ sono infinitesimi (o finiti) allora anche la somma $\xi + \zeta$ e il prodotto $\xi \cdot \zeta$ sono infinitesimi (o finiti, rispettivamente); ecc.

Grazie agli infinitesimi è possibile formalizzare una nozione di "vicinanza".

Definizione 2.5. Due numeri ξ e ζ si dicono *infinitamente vicini* se $\xi - \zeta$ è infinitesimo. In questo caso scriviamo $\xi \sim \zeta$.

La relazione $\sim$ è una relazione di equivalenza. Il prossimo risultato fornisce una rappresentazione "canonica" dei numeri limitati.

Teorema 2.6. *Ogni numero limitato ξ è infinitamente vicino ad un unico numero reale $r \sim \xi$.*

Un tale numero $r \in \mathbb{R}$ si dice *parte standard* di ξ, e si denota $r = st(\xi)$. Se ξ è infinito positivo, si pone per convenzione $st(\xi) = +\infty$. Analogamente, si pone $st(\xi) = -\infty$ quando ξ è infinito negativo. Nell'analisi nonstandard l'uso delle parti standard rimpiazza completamente l'uso dei limiti. Ad esempio, se ξ e ζ sono numeri limitati allora $st(\xi+\zeta) = st(\xi)+st(\zeta)$, $st(\xi\cdot\zeta) = st(\xi)\cdot st(\zeta)$, e $st(\xi/\zeta) = st(\xi)/st(\zeta)$ (purché $st(\zeta) \neq 0$).

3. L'analisi nonstandard

La scoperta di Robinson dell'analisi nonstandard è basata sull'esistenza di *modelli nonstandard* dei numeri reali. Si tratta di particolari campi non-archimedei che soddisfano tutte le "proprietà elementari" di $\mathbb{R}$. Analogamente a quanto fatto per i numeri reali, procederemo in modo assiomatico.[5]

Definizione 3.1. Si dice *estensione nonstandard* (dell'analisi elementare) una corrispondenza $*$ che associa ad ogni oggetto *standard* A dell'analisi elementare un unico oggetto *nonstandard* A^*, in modo che siano verificate le proprietà seguenti:

(1)
- Se x è un numero reale o una n-upla ordinata di numeri reali, $x^* = x$;
- Se A è un insieme standard, $A^* \supseteq A$ è un suo soprainsieme;
- Se $f : A \to B$ è una funzione standard, $f^* : A^* \to B^*$ è una sua estensione (cioè $f^*(a) = f(a)$ per ogni $a \in A$);

[5] Per non appesantire eccessivamente la trattazione, la definizione che segue (in particolare il principio di *transfer*) è stata espressa in modo informale. Per una formulazione rigorosa rimandiamo alla bibliografia, e in particolare ai libri di testo [4] e [5] dove si trova anche una discussione del problema dell'esistenza ed unicità delle estensioni nonstandard.

(2) Principio di *transfer* (o principio di Leibniz):
Sia $P(a_1, \ldots, a_n)$ una proprietà degli oggetti standard $a_1, \ldots, a_n$ espressa in *forma elementare*. Allora $P(a_1, \ldots, a_n)$ vale se e solo se la stessa proprietà vale per le corrispondenti estensioni nonstandard, cioè:

$$P(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow P(a_1^*, \ldots, a_n^*).$$

Per evitare il caso banale in cui $*$ è l'identità, si assume che $A^* \neq A$ per ogni A infinito. Il principio di *transfer* è una formalizzazione dell'idea originale di Leibniz sugli infinitesimi, secondo la quale il loro uso era regolato dalle "stesse leggi" valide per i numeri reali. Una proprietà P è espressa in *forma elementare* quando è espressa da una formula in cui ogni quantificatore è *ristretto* ad un insieme. In altre parole, ogni volta che si ha una quantificazione "per ogni x ..." oppure "esiste un y ...", è necessario specificare all'interno di quali insiemi le variabili x ed y stanno variando: "per ogni $x \in A$ ..." oppure "esiste $y \in B$ ...". Non è invece ammesso quantificare su sottoinsiemi, cioè formule che contengono espressioni del tipo "per ogni sottoinsieme $X \subseteq A \ldots$" non sono espresse in forma elementare.

L'estensione nonstandard $+^*$ della funzione binaria *somma* sui numeri reali determina una operazione binaria su $\mathbb{R}^*$. Analogamente per l'operazione *prodotto*. L'estensione $<^*$ dell'ordinamento su $\mathbb{R}$ è definita come la relazione binaria soddisfatta dalle coppie ordinate dell'insieme $\{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x < y\}^*$. Applicando il principio di *transfer* si dimostra il seguente

Teorema 3.2. $(\mathbb{R}^*, +^*, \cdot^*, <^*, 0, 1)$ *è un campo ordinato estensione propria di* $\mathbb{R}$.

Un tale $\mathbb{R}^*$ si dice campo dei numeri *iperreali* dell'analisi nonstandard.

Analogamente, sempre per *transfer*, si dimostra che l'insieme dei numeri *ipernaturali* $\mathbb{N}^*$ è un sottoinsieme illimitato di $\mathbb{R}^*$, e che ogni suo elemento ν ha come successore immediato $\nu+1 \in \mathbb{N}^*$ e come predecessore immediato $\nu-1 \in \mathbb{N}^*$ (purché $\nu \neq 0$). Inoltre, tutti gli ipernaturali *nonstandard* sono infiniti, cioè se $\nu \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$, allora necessariamente $\nu > n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Da quanto visto fin qui, si potrebbe essere indotti a concludere che applicare il *transfer* consista semplicemente nel mettere degli asterischi. In realtà le cose non sono così semplici. Ad esempio, per *transfer* dalla proprietà di completezza di $\mathbb{R}$ si dovrebbe dedurre che anche i numeri iperreali $\mathbb{R}^*$ sono completi. Ma questa conclusione è falsa! (abbiamo già notato che gli infinitesimi sono un insieme superiormente limitato senza sup). Dov'è l'errore? Analizzando la usuale definizione di completezza, si nota che essa contiene una quantificazione *non* ristretta: "per ogni *sottoinsieme* non vuoto di $\mathbb{R}$". Non è quindi espressa in forma elementare e non possiamo pertanto applicarvi il principio di *transfer*.

Seguendo l'uso comune, nel seguito ometteremo gli asterischi nel denotare le estensioni nonstandard delle funzioni (ad esempio scriveremo $+$ anziché $+^*$ per denotare la somma tra numeri iperreali, ecc.).

4. Un po' di analisi con i metodi nonstandard

Dopo lo studio della proprietà di completezza dei numeri reali, e dopo aver acquisito familiarità con l'algebra dei numeri infinitesimi ed infiniti, si può passare subito a trattare la nozione di continuità (in analisi nonstandard non c'è bisogno di premettere lo studio delle successioni e la teoria dei limiti).

Definizione 4.1. Una funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ è *continua* in un punto $x_0 \in (a, b)$ se per ogni $\varepsilon \sim 0$, si ha $f(x_0 + \varepsilon) \sim f(x_0)$.[6]

Il contenuto intuitivo di questa definizione è evidente. Una funzione f è continua nel punto x_0 se i punti "vicini" ad x_0 hanno una immagine "vicina" a $f(x_0)$. Ad esempio, la funzione "quadrato" $f(x) = x^2$ è continua in ogni punto $x_0 \in \mathbb{R}$ perché per ogni infinitesimo ε, $f(x_0+\varepsilon) - f(x_0) = x_0^2 + 2x_0\varepsilon + \varepsilon^2 - x_0^2 = \varepsilon(x_0 + \varepsilon) \sim 0$.

Se X è un insieme non vuoto di numeri reali, valgono le seguenti caratterizzazioni: $\sup X = r \in \mathbb{R}$ ($\inf X = r \in \mathbb{R}$) se e solo se r è un maggiorante (un minorante, rispettivamente) per X e $x \sim \xi$ per un opportuno numero iperreale $\xi \in X^*$; $\sup X = +\infty$ ($\inf X = -\infty$) se e solo se X^* contiene numeri infiniti positivi (negativi, rispettivamente). Dimostriamo ora due classici risultati dell'analisi.

Teorema 4.2 (Weierstrass)**.**
Ogni funzione continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ su un intervallo chiuso e limitato ha massimo.

Dim. Sia $l = \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$. Allora $l = st(f(\xi_0))$ per un opportuno elemento $f(\xi_0)$ appartenente all'estensione nonstandard $\{f(x) \mid x \in [a, b]\}^* = \{f(\xi) \mid \xi \in [a, b]^*\}$. Poiché $\xi_0 \in [a, b]^*$, la sua parte standard $x_0 = st(\xi_0) \in [a, b]$. Per l'ipotesi di continuità, $x_0 \sim \xi_0 \Rightarrow f(x_0) \sim f(\xi_0) \sim l$. Ma due numeri reali sono infinitamente vicini solo se coincidono, quindi $f(x_0) = l$ è il punto di massimo cercato. $\square$

Teorema 4.3 (dello zero)**.**
Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua con $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Allora esiste un punto $c \in (a, b)$ con $f(c) = 0$.

Dim. Per ogni naturale $n > 0$, siano $x_n, y_n \in [a, b]$ due punti tali che $f(x_n) < 0$, $f(y_n) > 0$ e $0 < y_n - x_n \leq 1/n$ (ad esempio, $x_n = \max\{r \in \Lambda_n \mid f(r) < 0\}$ e $y_n = x_n + (b-a)/n$, dove $\Lambda_n = \{a + i(b-a)/n \mid i = 0, 1, \ldots, n\}$). Siano $(x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}^*}$ e $(y_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}^*}$ le estensioni nonstandard delle successioni $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, e fissiamo N ipernaturale infinito. Per *transfer*, $x_N, y_N \in [a, b]^*$, $f(x_N) < 0$, $f(y_N) > 0$ e $0 < y_N - x_N < 1/N \sim 0$. Sia adesso $c \doteq st(x_N) = st(y_N) \in [a, b]$. Per l'ipotesi di continuità, da $c \sim x_N$ e $c \sim y_N$ segue che $f(c) \sim f(x_N)$ e $f(c) \sim f(y_N)$. Poiché $f(c) \in \mathbb{R}$ è infinitamente vicino sia ad un numero iperreale negativo che ad un numero iperreale positivo, necessariamente $f(c) = 0$. $\square$

Il concetto di *continuità uniforme* viene spesso omesso nelle trattazioni scolastiche. Eppure si tratta di una nozione molto importante: ad esempio su di essa si basa la dimostrazione che ogni funzione continua su un intervallo chiuso e limitato è ivi integrabile. Saper distinguere tra continuità e continuità uniforme spesso non è facile. L'analisi nonstandard può essere di aiuto perché consente di formulare le definizioni in termini più semplici.

Definizione 4.4. Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ è *uniformemente continua* su un intervallo I se per ogni $\xi, \zeta \in I^*$, si ha che $\xi \sim \zeta \Rightarrow f(\xi) \sim f(\zeta)$.

Mentre nella definizione di continuità la coppia di punti considerati contiene un numero reale x_0, per l'uniforme continuità occorre considerare tutte le coppie di numeri iperreali (quindi anche le coppie di punti entrambi infinitesimi o infiniti). Ovviamente ogni funzione uniformemente continua su I è necessariamente continua

[6] Questa definizione *nonstandard*, così come le altre che seguono, è dimostrabilmente equivalente a quella *standard*.

in ogni punto di I, ma non vale il viceversa. Ad esempio, la funzione "quadrato" $f(x) = x^2$ *non* è uniformemente continua su $\mathbb{R}$. Infatti, fissato un numero infinito Ω, si ha $\Omega \sim \Omega + 1/\Omega$ mentre $f(\Omega + 1/\Omega) - f(\Omega) = 2 + 1/\Omega^2$ *non* è infinitesimo.

Il prossimo risultato è fondamentale per dimostrare l'integrabilità delle funzioni continue su intervalli chiusi e limitati. La dimostrazione nonstandard è poco più di un banale esercizio.

Teorema 4.5 (Cantor)**.**
Ogni funzione continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ su un intervallo chiuso e limitato è uniformemente continua.

Dim. Se due punti $\xi, \zeta \in [a, b]^*$ sono infinitamente vicini allora hanno la stessa parte standard $st(\xi) = st(\zeta) = x_0$. Poiché $[a, b]$ è chiuso e limitato, $x_0 \in [a, b]$. Per continuità, $f(\xi) \sim f(x_0) \sim f(\zeta)$, dunque $f(\xi) \sim f(\zeta)$. □

Definizione 4.6. Una funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ è *derivabile* in un punto $x_0 \in (a, b)$ se esiste un numero reale $f'(x_0)$ tale che, per ogni infinitesimo $\varepsilon \neq 0$,

$$\frac{f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)}{\varepsilon} \sim f'(x_0).$$

Dunque una funzione è derivabile nel punto x_0 quando tutte le rette secanti il suo grafico in corrispondenza ad incrementi "piccoli" di x_0, hanno un coefficiente angolare "vicino" a $f'(x_0)$. A titolo di esempio, consideriamo ancora una volta la funzione "quadrato" $f(x) = x^2$. Per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ e per ogni infinitesimo $\varepsilon \neq 0$:

$$\frac{f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)}{\varepsilon} = \frac{x_0^2 + 2x_0\varepsilon + \varepsilon^2 - x_0^2}{\varepsilon} = 2x_0 + \varepsilon \sim 2x_0.$$

Resta così dimostrato che f è derivabile in ogni punto e $f'(x) = 2x$ (si confronti con l'argomento di Euler riportato nella sezione storica §1).

Per motivi di "spazio" ci fermiamo qui. Per le dimostrazioni che abbiamo omesso, e per una trattazione organica dell'analisi nonstandard, rimandiamo ai testi indicati in bibliografia.

A conclusione, ritengo importante citare la sperimentazione didattica della scuola superiore "André Chavanne" di Ginevra e della scuola tecnica HES (una istituzione intermedia tra scuola superiore ed università) di Lullier, in Svizzera. Già da diversi anni, in quelle scuole l'analisi viene insegnata usando i numeri iperreali dell'analisi nonstandard. Materiale scolastico (in inglese o francese) può essere richiesto al Prof. O'Donovan (e-mail: `richard.o-donovan@edu.ge.ch`), oppure consultato sul sito della scuola "André Chavanne": `http://wwwedu.ge.ch/po/chavanne`, alla voce "einseignement" (attenzione all'assenza del "punto" tra `www` ed `edu`).

Soluzione dell'indovinello.
In forza dell'abitudine siamo soliti pensare ai simboli ε e δ come corrispondenti a numeri "piccoli". Nel nostro caso, questo è fuorviante. Proviamo a riscrivere quella definizione usando invece i simboli M e K, usualmente associati a numeri "grandi".

Per ogni $M > 0$ esiste $K > 0$ tale che per ogni x
se $|x - x_0| < M$ allora $|f(x) - f(x_0)| < K$.

Si tratta della nozione di *limitatezza locale* (f è limitata su ogni insieme limitato).

Bibliografia

Sono pochi i contributi divulgativi sull'analisi nonstandard disponibili in italiano. Tra questi raccomando l'eccellente articolo (anche se un po' datato) di M. Davis e R. Hersh [2], pubblicato su "Le Scienze". Per gli aspetti più strettamente matematici e didattici, consiglio il libro di H.J. Keisler [5], che è stato adottato come libro di testo in alcuni colleges degli Stati Uniti. Molto interessanti sono anche i recenti libri di R. Goldblatt [4] e di K. Stroyan [9] (in inglese). Quest'ultimo è liberamente disponibile in internet. Per gli aspetti storici e filosofici, oltre al capitolo X del libro [7] di Robinson, è istruttiva la lettura del breve saggio [6] di I. Lakatos. Una ampia raccolta di fonti storiche si può trovare in [1].

[1] U. Bottazzini, P. Freguglia e L. Toti Rigatelli, *Fonti per la storia della matematica*, Sansoni Editore, Firenze 1992.

[2] M. Davis, R. Hersh, *L'analisi non-standard*, Le Scienze, n. 40 (1972), 76–83. Ristampato in: *Logica*, Quaderni de "Le Scienze", n. 60 (1981). [È la traduzione italiana di: *Non-standard Analysis*, Scientific American n. 226 (1972), 78–86.]

[3] Euclide, *Gli elementi*, a cura di A. Frajese e L. Maccioni, UTET, Torino, 1970.

[4] R. Goldblatt, *Lectures on the hyperreals*, Springer, New York, 1998.

[5] H.J. Keisler, *Elementi di analisi matematica*, Piccin Editore, Padova, 1982. [È la traduzione italiana di: *Elementary Calculus*, Prindle, Weber and Schmidt, 1976. Seconda edizione: 1986.]

[6] I. Lakatos, *Cauchy and the continuum: the significance of non-standard analysis for the history and philosophy of mathematics*, nel libro: Mathematics, Science and Epistemology, a cura di J. Worrall e G. Curries, Philosophical Papers vol. 2, Cambridge University Press, 1978, 43–60.

[7] A. Robinson, *Non-standard Analysis*, North-Holland, Amsterdam, 1966. Ristampato da Princeton University Press, 1996.

[8] L. Russo, *La rivoluzione dimenticata*, Feltrinelli, 1996. Seconda edizione: 1998.

[9] K.D. Stroyan, *Mathematical Background: Foundations of Infinitesimal Calculus*, Academic Press, 1997. [È disponibile in rete all'indirizzo: `http://www.math.uiowa.edu/~stroyan` (clickare su "Research interests" e poi su "Foundations of Infinitesimal Calculus").]

Ringrazio quei colleghi ed amici del Liceo Scientifico di Viareggio che hanno guardato con simpatia alla mia attività di ricerca. A loro è dedicato questo articolo. Una menzione è dovuta anche al Preside della mia scuola, per le sue particolari opinioni riguardo scambi e sinergie tra attività di ricerca in ambito universitario ed attività di insegnamento – opinioni che ho avuto modo di sperimentare personalmente.

Mauro Di Nasso, Liceo Scientifico Statale, via IV Novembre 151, 55049 Viareggio.

Attuale indirizzo: Dipartimento di Matematica, Università di Pisa, via Buonarroti 2, 56127 Pisa.

E-mail: `dinasso@dm.unipi.it`; URL: `http://www.dm.unipi.it/~dinasso`.