Errata Corrige, Andrea Vaccaro

8 giugno 2015

Proposizione 0.1 (9/3/15)**.** *Considero il campo ordinato e non archimedeo* ${}^*\mathbb{Q}$*. Di questo, considero* ${}^*\mathbb{Q}_{fin} = \{\xi \in^* \mathbb{Q} : \xi \text{ limitato}\}$*. Sia* I *l'ideale massimale degli infinitesimi. Mostrare che* $\mathbb{F} = {}^*\mathbb{Q}_{fin}/_I \cong \mathbb{R}$*.*

Dimostrazione. Mostriamo che $\mathbb{F}$ è ordinato. Induciamo su $\mathbb{F}$ l'ordine definito su ${}^*\mathbb{Q}_{fin}$. Dati $[x]_I \neq [y]_I$, diremo che $[x]_I < [y]_I$ se e solo se $x < y$. Siano $x' \in [x]_I$ e $y \in [y]_I$ e mostriamo che la relazione è ben definita. Sappiamo che $y - x > 0$ non è un infinitesimo. Ma allora $y' - x' = y' - y - (x' - x) + y - x > 0$ in quanto sommando a un valore che non è infinitesimo (come $y - x$) due infinitesimi, questo non può certamente cambiare segno. Cioè la validità della relazione non dipende dal rappresentante della classe scelto.

Valga $[x]_I < [y]_I$ e $[y]_I < [z]_I$, ma allora vale $x < z$ (per la proprietà transitiva della relazione d'ordine su ${}^*\mathbb{Q}_{fin}$) e quindi anche la relazione sul quoziente è transitiva.

Date poi 2 classi, scegliendo 2 rappresentanti questi saranno confrontabili, e dunque anche le classi, cioè la relazione sul quoziente è un ordine totale.

Che $\mathbb{F}$ sia un campo segue banalmente dal fatto che I è massimale.

Infine, vale che $\mathbb{Q}$ è immerso in $\mathbb{F}$, pensiamo alle successioni costanti in ${}^*\mathbb{Q}_{fin}$ che restano distinte quando vado a quozientare per I. Se riusciamo a mostrare che tutti gli insiemi limitati di tali oggetti ammettono unico *sup* a meno di infinitesimi, allora avremo immerso $\mathbb{R}$ in $\mathbb{F}$, giacchè basterà associare a ogni reale un insieme di razionali di cui lui sia il *sup*, a questo insieme associare il rispettivo insieme di successioni costanti in $\mathbb{F}$, e a lui il suo *sup*. Dalla costruzione sarà chiaro che questa corrispondenza preserverà sia ordine che operazioni. A questo punto, poiché abbiamo quozientato per gli infinitesimi, il campo non potrà che essere isomorfo a $\mathbb{R}$, poiché se lo estendesse propriamente sarebbe non archimedeo, e quindi ammetterebbe infinitesimi non nulli.

Sia allora $A = \{a_1 < a_2 < \cdots\}$ un insieme limitato di successioni costanti a valori in $\mathbb{Q}$ (positivi, il caso con valori negativi è analogo). Sia $a_i = (x_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$ con $x_{i,n} = x_i \in \mathbb{Q}$ (cioè a_i è una successione costante), e definiamo in ${}^*\mathbb{Q}_{fin}$ l'elemento $a = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Vale che a è un maggiorante di A (dato a_i, per $j \geq i$ vale $x_j > x_i$ poiché $a_j > a_i$ e le due successioni sono costanti, quindi su un insieme cofinito vale $a > a_i$). Supponiamo ora $b < a$; se $a - b$ è infinitesimo, allora non ci interessa, poiché quozientando viene assimilato nella classe di a. Supponiamo allora esista un $m \in \mathbb{N}$ tale che $a - b > \frac{1}{m}$. Considero allora la successione $a' = (x_i - \frac{1}{m})_{i\in\mathbb{N}}$; se ragiono in $\mathbb{Q}$ so che le successioni a e a' hanno entrambe limite (sono limitate e monotone), ma hanno limite distinto, esiste perciò un numero razionale q maggiore di tutti gli elementi di a' e minore di quasi tuti gli elementi di a. Se prendo allora la successione costantemente q (la chiamo ancora q), si verifica che $b < a - \frac{1}{m} < q < a_j$ per un j sufficientemente grande. Abbiamo cioè mostrato che a è effetivamente l'estremo superiore dell'insieme, quindi abbiamo concluso.

□

Proposizione 0.2 (24/3/15)**.** *Sia* $A = \{\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots\}$*. Se* $\sum_n \frac{1}{\alpha_n} < \infty$ *allora* $d(A) = 0$*.*

Dimostrazione. Chiamiamo $a_n = \frac{|A \cap [1,n]|}{n}$. Punti di massimo relativo della successione sono $a_{\alpha_n} = \frac{|A \cap [1,\alpha_n]|}{\alpha_n} = \frac{n}{\alpha_n}$, quindi se $\frac{n}{\alpha_n}$ va a zero per $n \to \infty$, segue la tesi. Ma $\frac{n}{\alpha_n}$ va a zero perché la successione $\left\{\frac{1}{\alpha_n}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$, la cui serie converge, tende a zero più fortemente di $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$, la cui serie non converge. Si deve dunque avere che $\frac{\frac{1}{\alpha_n}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{\alpha_n} \to 0$ per $n \to \infty$. $\square$