Esercizio:
Trovare un insieme A tale che $\bar{d}(A) = 0$ e $BD(A) = 1$.
Dimostrazione:
Consideriamo l'insieme $A = \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Valgono:

$$\bar{d}(A) = \limsup_{n\to\infty} \frac{|A \cap [1,n]|}{n} = \limsup_{n\to\infty} 0 = 0,$$
$$BD(A) = \lim_{n\to\infty} \max_{x\in\mathbb{Z}} \frac{|A \cap [x+1, x+n]|}{n} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

□

Esercizio:
Dato $A \subseteq \mathbb{Z}$, vale

$$BD(A) = 1 \iff A \text{ è spesso.}$$

Dimostrazione:

($\Leftarrow$) Se A è spesso allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un intervallo $I_n \subseteq A$ tale che $|I_n| = n$. In particolare se consideriamo $x_n = \min I_n$, vale

$$I_n = [x_n + 1, x_n + n]$$

($\Leftarrow$) Supponiamo per assurdo che A non sia spesso. Dunque esiste un $m \in \mathbb{N}$ tale che per ogni intervallo $I \subseteq A$ vale

$$\mid I \mid < m.$$

Sappiamo che per come è definita la densità di Banach, per ogni insieme $B \subseteq \mathbb{Z}$ e per ogni $x \in \mathbb{Z}$:

$$BD(B) = BD(B + x).$$

Quindi possiamo assumere senza perdita di generalità che l'insieme A più grande con questa proprietà sia

$$A = \left(\bigcup_{i=0}^{\infty} [im+1, (i+1)m]\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} [-(im+1), -(i+1)m]\right).$$

Calcoliamo dunque la densità di Banach di questo insieme.

$$BD(A) = \max_{x\in\mathbb{Z}} \frac{|A \cap [x+1, x+n]|}{n} = \frac{n - n/m}{n} = 1 - \frac{1}{m} < 1$$

e questo è assurdo.

□

Osservazione 1:
Dato $A \subseteq {}^*\mathbb{N}$ i cui elementi sono finiti, esiste un $[\beta] \in {}^*\mathbb{N}$ infinito tale che per ogni $[\alpha] \in A$ si ha $[\alpha] < [\beta]$ (ossia A è limitato da un elemento infinito).
Dimostrazione:
Basta considerare la successione $[\beta]$ con

$$\beta = \langle n \mid n \in \mathbb{N} \rangle.$$

Infatti consideriamo $[\alpha] \in A$. Questo per ipotesi è finito, ossia esiste un $m \in \mathbb{N}$ tale che

$$C = \{n \in \mathbb{N} \mid \alpha(n) < m\} \in \mathcal{U},$$

dove, ricordiamo, $\mathcal{U}$ è l'ultrafiltro relativo al modello non standard considerato. Ma osserviamo che

$$\mathcal{U} \ni C \subseteq \{n \in \mathbb{B} \mid \alpha(n) < n\}$$

e quindi $[\alpha] < [\beta]$.

□

Osservazione 2:
Se $A \subseteq {}^*\mathbb{N}$ è interno e limitato, allora ha un massimo.
Dimostrazione:
Poiché A è interno sappiamo anche che esiste $\langle A_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle$ con $A_n \subseteq \mathbb{N}$ tale che

$$[\alpha] \in A \Longleftrightarrow C_\alpha = \{n \in \mathbb{N} \mid \alpha(n) \in A_n\} \in \mathcal{U}.$$

In particolare abbiamo che

$$\Sigma = \{n \in \mathbb{N} \mid A_n \text{ è limitato } \} \in \mathcal{U},$$

altrimenti A sarebbe illimitato. Possiamo quindi considerare per ogni $n \in \Sigma$,

$$\tilde{m}_n = \max A_n$$

poiché gli insiemi limitati in $\mathbb{N}$ ammettono massimo. In questo modo abbiamo assegnato a una *grande* quantità di naturali un valore e quindi, a meno di *poche* scelte ($\tilde{m}_n$ dove $n \notin \Sigma$), abbiamo costruito la classe $[M] \in {}^*\mathbb{N}$ dove

$$M = \langle \tilde{m}_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle.$$

Facciamo vedere che $[M] = \max A$. Per costruzione chiaramente si ha $[M] \in A$ e inoltre, dato $[\alpha] \in A$, si ha $C_\alpha \in \mathcal{U}$. Ma allora

$$\{n \in \mathbb{N} \mid \alpha(n) < \tilde{m}_n\} \supseteq C_\alpha \cap \Sigma \in \mathcal{U},$$

ossia $[\alpha] < [M]$.

□

Overspill (1):
Se $A \subseteq {}^*\mathbb{N}$ è interno e contiene infiniti naturali (ossia $A \cap \mathbb{N}$ è illimitato in $\mathbb{N}$), allora esiste $[\xi] \in {}^*\mathbb{N}$ infinito tale che $[\xi] \in A$.
Dimostrazione:
Supponiamo per assurdo che per ogni $[\xi] \in {}^*\mathbb{N}$ infinito, $[\xi] \notin A$ (ossia A contiene solo elementi finiti). Allora per *Osservazione 1* A è limitato in ${}^*\mathbb{N}$ e quindi per *Osservazione 2* A ammette massimo, ma questo è un assurdo perché questo massimo dovrebbe essere infinito (poiché $A \cap \mathbb{N}$ è illimitato in $\mathbb{N}$).

□

Overspill (2):
Se $A \subseteq {}^*\mathbb{N}$ è interno e $\mathbb{N} \subseteq A$, allora esiste $[\alpha] \in {}^*\mathbb{N}$ infinito tale che $[1, \alpha] \subseteq A$.
Dimostrazione:
Sappiamo per *Overspill 1* che esiste $[\xi] \in {}^*\mathbb{N}$ infinito tale che $[\xi] \in A$. Per le proprietà di chiusura degli interni abbiamo che anche l'insieme

$$B = (A \cap [1, \xi])^c$$

è interno. Ma sappiamo che gli interni di ${}^*\mathbb{N}$ hanno minimo, quindi possiamo considerare $[\alpha] = \min B - 1$. Facciamo vedere che $[\alpha]$ è la classe cercata: chiaramente $[\alpha]$ è infinito, poiché $\min B$ lo è. Basta quindi far vedere che $[1, \alpha] \subseteq A$, ma questo è vero per la minimalità di $[\alpha] + 1$ in B.

□

Underspill (1):
Se $A \subseteq {}^*\mathbb{N}$ è interno e contiene elementi infiniti arbitrariamente piccoli, allora $A \cap \mathbb{N} \neq \emptyset$.
Dimostrazione:
Poiché A è interno, ammette minimo $[\alpha]$. Questo elemento non può essere infinito, poiché A contiene infiniti arbitrariamente piccoli e ${}^*\mathbb{N} \backslash \mathbb{N}$ non ha minimo. Ma allora $[\alpha]$ è finito.

□

Underspill (2):
Se $A \subseteq {}^*\mathbb{N}$ è interno e per ogni $[\xi] \in {}^*\mathbb{N}$ infinito $[\xi, +\infty] \subseteq A$, allora esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $[n, +\infty] \subseteq A$.
Dimostrazione:
Per ipotesi abbiamo che in particolare per ogni $[\xi]$ infinito, $[\xi] \in A$ e quindi per *Underspill (1)* sappiamo che esiste un $n \in \mathbb{N}$ tale che $[n] \in A$. Sia ora

$$C = [n, +\infty) \cap A.$$

Poiché $[n, +\infty]$ è interno, si ha che C^c è un sottoinsieme interno e limitato di ${}^*\mathbb{N}$ e quindi ammette un massimo $[\beta]$ finito. Di conseguenza$[\beta + 1]$ è finito e vale

$$[\beta + 1, +\infty) \subseteq A$$

per massimalità di $[\beta]$ in C^c.

□