Esercizi per il corso "ultrafiltri e metodi non standard"

Marco Usula

Anno accademico 2014/2015

Notazioni Indicherò con ω l'insieme $\{0, 1, 2, 3, ...\}$, e con $\mathbb{N}$ l'insieme $\omega \setminus \{0\}$.
I simboli $\subset$ e $\supset$ indicano inclusioni *strette* tra insiemi.

1 Esercizi 24-2-2015

Esercizio 1.1. Sia $\mathcal{F}$ un filtro su un insieme I. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. $A \notin \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$.
2. Se $A_1 \cup \cdots \cup A_n \in \mathcal{F}$, allora esiste i tale che $A_i \in \mathcal{F}$.
3. $\mathcal{F}$ è un filtro massimale di I (rispetto all'inclusione).

Dimostrazione.

1. $(1 \Rightarrow 2)$ Supponiamo che $A_1 \cup \cdots \cup A_n \in \mathcal{F}$. Se per assurdo $A_i \notin \mathcal{F}$ per ogni i, allora, per il punto 1, $A_i^c \in \mathcal{F}$ per ogni i, e quindi si ha $A_1^c \cap \cdots \cap A_n^c \in \mathcal{F}$, da cui che $(A_1^c \cap \cdots \cap A_n^c)^c = A_1 \cup \cdots \cup A_n \notin \mathcal{F}$, assurdo.
2. $(2 \Rightarrow 3)$ Supponiamo per assurdo che esista $\mathcal{F}'$ filtro su I tale che $\mathcal{F}' \supset \mathcal{F}$, e sia $X \in \mathcal{F}' \setminus \mathcal{F}$. Allora $X \cup X^c = I \in \mathcal{F}$, e quindi per il punto 2 si ha $X \in \mathcal{F}$ o $X^c \in \mathcal{F}$. Ma la prima è falsa per la scelta di X, e quindi $X^c \in \mathcal{F}$, e questo è assurdo perchè si avrebbe $X, X^c \in \mathcal{F}'$ da cui $\emptyset = X \cap X^c \in \mathcal{F}'$.
3. $(3 \Rightarrow 1)$ Se esiste $A \subseteq I$ tale che $A, A^c \notin \mathcal{F}$, allora consideriamo la famiglia $\mathcal{S} = \mathcal{F} \cup \{A\}$. Allora $\mathcal{S}$ ha la FIP. Infatti, dato che $\mathcal{F}$ ha la FIP ed è chiuso per intersezioni finite, se $\mathcal{S}$ non avesse la FIP dovrebbe essere $A = \emptyset$ oppure $A \cap X = \emptyset$ per qualche $X \in \mathcal{F}$. Chiaramente $A \neq \emptyset$ (in quanto altrimenti $A^c = I \in \mathcal{F}$); inoltre, se fosse $A \cap X = \emptyset$ si avrebbe $X \subseteq A^c$, da cui $A^c \in \mathcal{F}$, assurdo per ipotesi su $\mathcal{F}$. Ora, dato che $\mathcal{S}$ ha la FIP, $\mathcal{S}$ è contenuto in un filtro su I, che contiene $\mathcal{F}$ strettamente in quanto contiene A che non sta in $\mathcal{F}$. Ne consegue che $\mathcal{F}$ non è massimale.

$\square$

Esercizio 1.2. Una *misura a due valori finitamente additiva* su un insieme non vuoto I è una mappa $\mu : \mathcal{P}(I) \to \{0, 1\}$ tale che $\mu(\emptyset) = 0, \mu(I) = 1$, e per ogni A, B sottoinsiemi di I disgiunti, si ha $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

1. Se $\mu : \mathcal{P}(I) \to \{0,1\}$ è una misura a due valori f.a., allora la famiglia $\mathcal{U}_\mu = \{A \subseteq I : \mu(A) = 1\}$ è un ultrafiltro. Se μ è inoltre *non atomica* (ossia per ogni $i \in I$ si ha $\mu(\{i\}) = 0$) allora $\mathcal{U}_\mu$ è non principale.

2. Se $\mathcal{U}$ è un ultrafiltro su I, allora la funzione $\mu_{\mathcal{U}} : \mathcal{P}(I) \to \{0,1\}$ definita ponendo $\mu_{\mathcal{U}}(A) = 1 \iff A \in \mathcal{U}$, è una misura a due valori f.a. Se inoltre $\mathcal{U}$ è non principale, allora $\mu_{\mathcal{U}}$ è non atomica.

Dimostrazione.

1. Verifichiamo le proprietà di ultrafiltro.

   (a) $\mu(\emptyset) = 0$ e $\mu(I) = 1$ per ipotesi, e quindi $\emptyset \notin \mathcal{U}_\mu$ e $I \in \mathcal{U}_\mu$.

   (b) Sia $A \in \mathcal{U}_\mu$: allora $\mu(A) = 1$. Sia $B \supseteq A$. Allora $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \backslash A)$ e $\mu(A) = 1$, quindi deve essere necessariamente $\mu(B) = 1$. Ne consegue che $B \in \mathcal{U}_\mu$.

   (c) Siano $A, B \in \mathcal{U}_\mu$. Mostriamo che $\mu(A \backslash B) = \mu(B \backslash A) = \mu((A \cup B)^c) = 0$. Si ha infatti

   $$B = (B \backslash A) \sqcup A$$

   e quindi

   $$\begin{aligned} 1 &= \mu(B) \\ &= \mu(B \backslash A) + \mu(A) \\ &= \mu(B \backslash A) + 1 \end{aligned}$$

   da cui che $\mu(B \backslash A) = 0$. Analogamente si dimostra che $\mu(A \backslash B) = 0$. Inoltre, $A \cup B \supseteq A$, e quindi per il punto precedente si ha $A \cup B \in \mathcal{U}_\mu$ ossia $\mu(A \cup B) = 1$, da cui che $\mu((A \cup B)^c) = 0$. Ora osserviamo che I si partiziona negli insiemi $(A \cup B)^c, A \backslash B, B \backslash A, A \cap B$. Per la finita additività, esattamente uno di questi quattro deve avere misura 1: allora, per esclusione, questo deve essere $A \cap B$, ossia $A \cap B \in \mathcal{U}_\mu$.

   (d) Supponiamo che $A \notin \mathcal{U}_\mu$. Allora $\mu(A) = 0$, e quindi dato che $\mu(I) = 1$ deve essere $\mu(A^c) = 1$. Ne consegue che $A^c \in \mathcal{U}_\mu$.

   Ora, sia μ non atomica. Se $\mathcal{U}_\mu$ fosse principale, esisterebbe $i \in I$ tale che $\{i\} \in \mathcal{U}_\mu$, ossia $\mu(\{i\}) = 1$, e questo è assurdo per l'ipotesi di non atomicità di μ.

2. Verificiamo le proprietà di misura a due valori f.a. .

   (a) $\emptyset \notin \mathcal{U}$ e $I \in \mathcal{U}$, da cui che $\mu(\emptyset) = 0$ e $\mu(I) = 1$.

   (b) Siano A, B sottoinsiemi disgiunti di I. Distinguiamo diversi casi:

      i. se $A \notin \mathcal{U}$ e $B \notin \mathcal{U}$, allora $A \cup B \notin \mathcal{U}$ perchè $\mathcal{U}$ è ultrafiltro: dunque $\mu(A) + \mu(B) = 0 + 0 = 0 = \mu(A \cup B)$;

      ii. se $A \notin \mathcal{U}$ e $B \in \mathcal{U}$, allora $A \cup B \in \mathcal{U}$ perchè $\mathcal{U}$ è chiuso per soprainsieme: dunque $\mu(A) + \mu(B) = 0 + 1 = 1 = \mu(A \cup B)$;

      iii. se $A \in \mathcal{U}$ e $B \notin \mathcal{U}$, allora si ragiona come nel caso precedente;

iv. il caso con $A \in \mathcal{U}$ e $B \in \mathcal{U}$ *non* si può verificare: infatti, se così fosse, essendo $\mathcal{U}$ un filtro dovrebbe essere $A \cap B = \emptyset \in \mathcal{U}$, assurdo.

Ne consegue che μ è finitamente additiva.

Sia ora $\mathcal{U}$ non principale. Allora, se $i \in I$, si ha $\{i\} \notin \mathcal{U}$, e quindi $\mu(\{i\}) = 0$: dalla generalità di i, si ha che μ è non atomica.

□

Esercizio 1.3. Sia I un insieme non vuoto, e sia $\mathbb{K}$ un campo. Allora esiste una corrispondenza biunivoca tra filtri su I e ideali propri dell'anello $\mathbb{K}^I$. Tale corrispondenza biunivoca si restringe ad una corrispondenza biunivoca tra ideali massimali e ultrafiltri su I.

Dimostrazione. Presa $f \in \mathbb{K}^I$, sia $\mathcal{V}(f)$ il luogo degli zeri di f. Definiamo

$$\begin{aligned} \psi : \mathrm{Filtri}(I) &\to \text{Ideali propri}\left(\mathbb{K}^I\right) \\ \mathcal{F} &\mapsto \mathfrak{a}_{\mathcal{F}} := \{f : I \to \mathbb{K} : \mathcal{V}(f) \in \mathcal{F}\} \end{aligned}$$

e dimostriamo che ψ è ben definita ed è una bigezione.

1. La ψ è ben definita, ossia $\mathfrak{a}_{\mathcal{F}}$ è un ideale proprio. Infatti:

   (a) Se $f, g \in \mathfrak{a}_{\mathcal{F}}$, allora $\mathcal{V}(f) \in \mathcal{F}$ e $\mathcal{V}(g) \in \mathcal{F}$. Allora $\mathcal{V}(f-g) \supseteq \mathcal{V}(f) \cap \mathcal{V}(g) \in \mathcal{F}$, e quindi $\mathcal{V}(f-g) \in \mathcal{F}$, da cui che $f - g \in \mathfrak{a}_{\mathcal{F}}$. Questo prova che $\mathfrak{a}_{\mathcal{F}}$ è un sottogruppo additivo.

   (b) Se $f \in \mathfrak{a}_{\mathcal{F}}$, e $g \in \mathbb{K}^I$, allora $\mathcal{V}(fg) \supseteq \mathcal{V}(f) \in \mathcal{F}$ da cui che $fg \in \mathfrak{a}_{\mathcal{F}}$.

   (c) Se per assurdo $\mathfrak{a}_{\mathcal{F}}$ fosse tutto l'anello, allora la mappa $1 : I \to \mathbb{K}$ che ad ogni elemento di I associa 1, starebbe in $\mathfrak{a}_{\mathcal{F}}$. Ma questa mappa ha luogo di zeri vuoto, e quindi si avrebbe $\emptyset \in \mathcal{F}$, assurdo.

2. La ψ è iniettiva. Infatti, se $\mathfrak{a}_{\mathcal{F}} = \mathfrak{a}_{\mathcal{G}}$, allora per ogni $f \in \mathbb{K}^I$ si ha che $\mathcal{V}(f) \in \mathcal{F} \iff \mathcal{V}(f) \in \mathcal{G}$. Ma, dato che ogni sottoinsieme di I è luogo di zeri di qualche funzione in $\mathbb{K}^I$, si ha che per ogni $X \subseteq I$ si ha $X \in \mathcal{F} \iff X \in \mathcal{G}$, ossia $\mathcal{F} = \mathcal{G}$.

3. La ψ è suriettiva. Infatti, sia $\mathfrak{a}$ un ideale proprio di $\mathbb{K}^I$, e definiamo

$$\mathcal{F}_{\mathfrak{a}} := \{\mathcal{V}(f) : f \in \mathfrak{a}\}.$$

   Dimostriamo che $\mathcal{F}_{\mathfrak{a}}$ è un filtro.

   (a) $\emptyset \notin \mathcal{F}_{\mathfrak{a}}$, in quanto se per assurdo esistesse $f \in \mathfrak{a}$ che non si annulla mai, allora, essendo la mappa $g : I \to \mathbb{K}$ tale che $g(t) = f(t)^{-1}$ l'inverso moltiplicativo di f, $\mathfrak{a}$ conterrebbe elementi invertibili e quindi sarebbe l'ideale banale, assurdo.

   (b) Se $X \in \mathcal{F}_{\mathfrak{a}}$ e $Y \supseteq X$, allora sia $f_X \in \mathfrak{a}$ tale che $\mathcal{V}(f_X) = X$, e sia $g \in \mathbb{K}^I$ tale che $\mathcal{V}(g) = Y$. Allora chiaramente $\mathcal{V}(gf_X) = Y$. Inoltre, essendo $\mathfrak{a}$ un ideale, $gf_X \in \mathfrak{a}$, e quindi $Y \in \mathcal{F}_{\mathfrak{a}}$.

(c) Se $X, Y \in \mathcal{F}_{\mathfrak{a}}$, siano $f_X, f_Y \in \mathfrak{a}$ aventi luoghi di zeri X e Y rispettivamente. Senza perdita di generalità, possiamo supporre che f_X, f_Y abbiano immagine in $\{0,1\}$ (infatti, definiamo $g_X : I \to \mathbb{K}$ in questo modo: se $f_X(t) = 0$, allora $g_X(t) = 0$, e se $f_X(t) \neq 0$, allora $g_X(t) = f_X(t)^{-1}$; essendo $\mathfrak{a}$ un ideale, si ha che $f_X g_X \in \mathfrak{a}$; inoltre, per ogni $t \in I$, $f_X g_X(t) \in \{0,1\}$, e $\mathcal{V}(f_X g_X) = \mathcal{V}(f_X) = X$). Definiamo

$$\begin{array}{rcl} h : I & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & \begin{cases} 1 & f_X(t) = 1 \wedge f_Y(t) = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \end{array}.$$

Osserviamo che $h \in \mathfrak{a}$, in quanto $h = hf_X$: infatti, hf_X ha valori in $\{0,1\}$, e quindi basta dimostrare che per ogni $t \in I$ si ha $hf_X(t) = 1 \iff h(t) = 1$; ma $hf_X(t) = 1 \Rightarrow h(t) = 1$ ovviamente, mentre $h(t) = 1$ implica $f_X(t) = 1$ per definizione di h, e quindi $hf_X(t) = 1$. Allora anche $h + f_Y \in \mathfrak{a}$. Inoltre, si ha per definizione di h

$$\mathcal{V}(h) = X \cup Y^c.$$

Osserviamo ora che h e f_Y non assumono mai contemporaneamente il valore 1, per definizione di h. Allora $h(t) + f_Y(t) = 0 \iff h(t) = f_Y(t) = 0$, ossia

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(h + f_Y) &= \mathcal{V}(h) \cap \mathcal{V}(f_Y) \\ &= (X \cup Y^c) \cap Y \\ &= (X \cap Y) \cup (Y^c \cap Y) \\ &= X \cap Y \end{aligned}$$

e quindi abbiamo finito in quanto $h + f_Y \in \mathfrak{a}$.

Ora, osserviamo che

$$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G} \Rightarrow \mathfrak{a}_{\mathcal{F}} \subseteq \mathfrak{a}_{\mathcal{G}} :$$

infatti, se $f \in \mathfrak{a}_{\mathcal{F}}$ allora $\mathcal{V}(f) \in \mathcal{F}$ e quindi $\mathcal{V}(f) \in \mathcal{G}$ da cui che $f \in \mathfrak{a}_{\mathcal{G}}$. Viceversa,

$$\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b} \Rightarrow \mathcal{F}_{\mathfrak{a}} \subseteq \mathcal{F}_{\mathfrak{b}} :$$

infatti, se $X \in \mathcal{F}_{\mathfrak{a}}$, allora esiste una funzione $f \in \mathfrak{a}$ tale che $\mathcal{V}(f) = X$: ma allora $\mathcal{V}(f) \in \mathcal{F}_{\mathfrak{b}}$, e quindi $X \in \mathcal{F}_{\mathfrak{b}}$. Ne consegue che se $\mathcal{U}$ è un ultrafiltro, allora $\mathfrak{a}_{\mathcal{U}}$ è massimale, mentre se $\mathfrak{a}$ è massimale allora $\mathcal{F}_{\mathfrak{a}}$ è massimale e quindi è un ultrafiltro.

□

Esercizio 1.4. Dimostrare che uno spazio topologico X è compatto se e solo se per ogni successione $(x_i)_{i \in I}$ e per ogni ultrafiltro $\mathcal{U}$ su I la successione ammette $\mathcal{U}$-limite.

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Sia $\mathcal{U}$ un ultrafiltro su I, e supponiamo per assurdo che esista una successione $(x_i)_{i \in I}$ in X che non ha $\mathcal{U}$-limite. Allora, per ogni $x \in X$, esiste un aperto U_x di X contenente x e tale che

$$A_x := \{i \in I : x_i \in U_x\} \notin \mathcal{U}.$$

Chiaramente, $\{U_x\}_{x\in X}$ è un ricoprimento aperto di X (perchè $x \in U_x$ per ogni $x \in X$) e quindi, essendo X compatto, ammette un sottoricoprimento finito, diciamo $U_{y_1}, ..., U_{y_k}$. Osserviamo ora che

$$A_{y_1} \cup ... \cup A_{y_k} = I :$$

infatti, per ogni $i \in I$, $x_i \in U_{y_j}$ per qualche $j \in \{1, ..., k\}$ (essendo $U_{y_1}, ..., U_{y_k}$ un ricoprimento di X) e quindi $i \in A_{y_j}$. Allora, dato che $\mathcal{U}$ è un ultrafiltro, deve esistere $j \in \{1, ..., k\}$ tale che $A_{y_j} \in \mathcal{U}$, e questo è assurdo per ipotesi sugli A_x. Ne consegue la tesi.
($\Leftarrow$) Dimostriamo che X soddisfa la seguente definizione equivalente di compattezza: *se $\{C_i\}_{i\in I}$ è una famiglia di chiusi di X aventi la FIP, allora tale famiglia ha intersezione non vuota.* Dato che $\{C_i\}_{i\in I}$ ha la FIP, esiste un ultrafiltro $\mathcal{U}$ su X contenente i C_i. Consideriamo ora la X-successione $x \mapsto x$. Allora, per ipotesi, la successione ha $\mathcal{U}$-limite. Questo significa che esiste un $x_0 \in X$ tale che, per ogni aperto V di X contenente x, $V \in \mathcal{U}$. Vogliamo dimostrare che $x_0 \in C_i$ per ogni i. Se per assurdo $x_0 \notin C_i$, allora $x_0 \in C_i^c$ che è aperto. Ne consegue che $C_i^c \in \mathcal{U}$: ma questo è assurdo, in quanto $C_i \in \mathcal{U}$. Ne consegue la tesi. □

Esercizio 1.5. Dimostrare il teorema di Tychonoff: data una famiglia $\{X_j\}_{j\in J}$ di spazi topologici compatti, il prodotto $Y = \prod_{j\in J} X_j$ è compatto.

Dimostrazione. Sfruttando l'esercizio precedente, dimostriamo che per ogni insieme I e per ogni ultrafiltro $\mathcal{U}$ su I, ogni I-successione su Y ha $\mathcal{U}$-limite. Sia $(y_i)_{i\in I}$ una I-successione su Y. Abbiamo $y_i = \left(x_j^{(i)}\right)_{j\in J}$ per certi $x_j^{(i)} \in X_j$ al variare di $i \in I, j \in J$. Allora, essendo X_j tutti compatti, per ogni $j \in J$, la I-successione $\left(x_j^{(i)}\right)_{i\in I}$ ha $\mathcal{U}$-limite, diciamo $\tilde{x}_j$. Consideriamo l'elemento $\tilde{y} = (\tilde{x}_j)_{j\in J}$, e dimostriamo che $\tilde{y}$ è un $\mathcal{U}$-limite per la I-successione $(y_i)_{i\in I}$. Sia V un aperto di Y contenente $\tilde{y}$. Allora, per definizione di topologia prodotto, esistono $U_j \subseteq X_j$ aperti tali che $U_j = X_j$ per quasi ogni $j \in J$ (tutti tranne un numero finito), e

$$\tilde{y} \in \prod_{j\in J} U_j \subseteq V.$$

Ne consegue che per ogni $j \in J$ si ha $\tilde{x}_j \in U_j$. Definiamo ora $A_j := \left\{i \in I : x_j^{(i)} \in U_j\right\}$. Dato che $\tilde{x}_j$ è il limite della I-successione $\left(x_j^{(i)}\right)_{i\in I}$, si ha che $A_j \in \mathcal{U}$. Ora, abbiamo

$$\begin{aligned}
\{i \in I : y_i \in V\} &\supseteq \left\{i \in I : y_i \in \prod_{j\in J} U_j\right\} \\
&= \left\{i \in I : (\forall j \in J) \left(x_j^{(i)} \in U_j\right)\right\} \\
&= \bigcap_{j\in J} \left\{i \in I : x_j^{(i)} \in U_j\right\} \\
&= \bigcap_{j\in J} A_j.
\end{aligned}$$

Ora, se $U_j = X_j$ allora chiaramente $A_j = I$. Dato che $U_j = X_j$ per quasi tutti i j, si ha che $A_j \neq I$ solo per un numero finito di indici, diciamo $j_1, ..., j_k$, e quindi

$$\bigcap_{j \in J} A_j = A_{j_1} \cap \cdots \cap A_{j_k} \in \mathcal{U}.$$

Ne consegue che $\{i \in I : y_i \in V\} \in \mathcal{U}$, e quindi dalla generalità di V si ha che $\tilde{y}$ è un $\mathcal{U}$-limite per la I-successione $(y_i)_{i \in I}$. □

2 Esercizi 2-3-2015

Esercizio 2.1. Sia $\mathcal{U}$ un ultrafiltro su I. Sono equivalenti:

1. $\mathcal{U}$ non è principale.
2. Se $X \subseteq I$ è finito, allora $X \notin \mathcal{U}$.
3. $\mathcal{U}$ estende il filtro di Frechet.

Dimostrazione.

1. $(1 \Rightarrow 2)$ Sia $\mathcal{U}$ non principale, e supponiamo per assurdo che contenga $X = \{x_1, ..., x_k\}$. Dato che $X = \{x_1\} \cup \cdots \cup \{x_k\}$, essendo $\mathcal{U}$ un ultrafiltro deve essere $\{x_i\} \in \mathcal{U}$ per qualche $i \in \{1, ..., k\}$. Ma allora $\mathcal{U}$ è l'ultrafiltro principale generato da x_i, assurdo.
2. $(2 \Rightarrow 3)$ Se X è cofinito, allora X^c è finito, e quindi per il punto 2 $X^c \notin \mathcal{U}$, da cui che, essendo $\mathcal{U}$ ultrafiltro, $X \in \mathcal{U}$.
3. $(3 \Rightarrow 1)$ Per ogni $i \in I$, l'insieme $I \backslash \{i\}$ è cofinito, e quindi sta in $\mathcal{U}$ perchè sta nel filtro di Frechet. Ne consegue che $\{i\} \notin \mathcal{U}$ per ogni $i \in I$, e quindi $\mathcal{U}$ è non principale.

□

Esercizio 2.2. Sia $\mathcal{U}$ un ultrafiltro su I, $\mathcal{V}$ un ultrafiltro su J, $\mathcal{W}$ un ultrafiltro su K.

1. Verificare che $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ è un ultrafiltro su $I \times J$.
2. Verificare che se $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ sono principali se e solo se lo è $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$.
3. Verificare che esistono ultrafiltri non principali $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ tali che $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V} \neq \mathcal{V} \otimes \mathcal{U}$.

Dimostrazione. Ricordiamo che se $A \in \mathcal{P}(I \times J)$, allora definiamo per $i \in I$ la fibra verticale $A_i = \{j \in J : (i, j) \in A\}$. Allora $A \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ se e solo se l'insieme $\{i \in I : A_i \in \mathcal{V}\}$ sta in $\mathcal{U}$.

1. Verifichiamo che $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ è un ultrafiltro.
   Se $\emptyset \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$, allora per ogni $i \in I$ si ha $\emptyset_i = \emptyset$: dunque, per ogni $i \in I$, $\emptyset_i \notin \mathcal{V}$, e quindi

$\{i \in I : \emptyset_i \in \mathcal{V}\} \notin \mathcal{U}$, da cui che $\emptyset \notin \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$.
Se $A, B \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$, osserviamo che

$$\begin{aligned} (A \cap B)_i &= \{j \in J : (i,j) \in A \cap B\} \\ &= \{j \in J : (i,j) \in A \wedge (i,j) \in B\} \\ &= \{j \in J : (i,j) \in A\} \cap \{j \in J : (i,j) \in B\} \\ &= A_i \cap B_i. \end{aligned}$$

Allora, dato che per ogni $i \in I$ si ha $A_i \in \mathcal{V} \wedge B_i \in \mathcal{V} \Rightarrow A_i \cap B_i \in \mathcal{V}$, abbiamo che

$$\begin{aligned} \{i \in I : (A \cap B)_i \in \mathcal{V}\} &= \{i \in I : A_i \cap B_i \in \mathcal{V}\} \\ &\supseteq \{i \in I : A_i \in \mathcal{V} \wedge B_i \in \mathcal{V}\} \\ &= \{i \in I : A_i \in \mathcal{V}\} \cap \{i \in I : B_i \in \mathcal{V}\}. \end{aligned}$$

Entrambi questi insiemi stanno in $\mathcal{U}$, in quanto $A, B \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$. Dato che $\mathcal{U}$ è chiuso per intersezioni e soprainsiemi, abbiamo che $\{i \in I : (A \cap B)_i \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$, e quindi $A \cap B \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$.
Se $A \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$, e $B \supseteq A$, allora $B_i \supseteq A_i$ per ogni $i \in I$. Questo significa che $A_i \in \mathcal{V} \Rightarrow B_i \in \mathcal{V}$, e quindi

$$\{i \in I : A_i \in \mathcal{V}\} \subseteq \{i \in I : B_i \in \mathcal{V}\}$$

e quindi, dato che il primo insieme sta in $\mathcal{U}$ in quanto $A \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$, si ha che anche il secondo ci sta, ossia $B \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$.
Se $A \notin \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$, allora $\{i \in I : A_i \in \mathcal{V}\} \notin \mathcal{U}$, da cui che $\{i \in I : (A_i)^c \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$. Ora, osserviamo che $(A^c)_i = (A_i)^c$ per ogni i: infatti, $x \in (A^c)_i$ sse $(i,x) \in A^c$ sse $(i,x) \notin A$ sse $x \notin A_i$ sse $x \in (A_i)^c$. Ne consegue che $\{i \in I : (A^c)_i \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$, e quindi che $A^c \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$.

2. Dati $x \in I$ e $y \in J$, si ha che $\{x\} \in \mathcal{U}$ e $\{y\} \in \mathcal{V}$ se e solo se $\{(x,y)\} \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$. Infatti $\{x\} \in \mathcal{U}$ e $\{y\} \in \mathcal{V}$ implica $\{i \in I : \{(x,y)\}_i \in \mathcal{V}\} = \{x\} \in \mathcal{U}$, da cui che $\{(x,y)\} \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$. Viceversa, se $\{(x,y)\} \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$, allora $\{i \in I : \{(x,y)\}_i \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$: quest'ultimo insieme può essere solo $\{x\}$ se $\{(x,y)\}_x = \{y\} \in \mathcal{V}$, perchè se non fosse $\{x\}$ allora sarebbe vuoto, assurdo perchè $\mathcal{U}$ non contiene il vuoto. Ne consegue la tesi.

3. Scegliamo $I = \mathbb{N}$, e siano $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ ultrafiltri non principali contenenti rispettivamente l'insieme dei pari e l'insieme dei dispari. $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ esistono, in quanto se $\mathcal{F}$ è il filtro di Fréchet, allora $\mathcal{F}$ non contiene nè l'insieme P dei pari nè l'insieme D dei dispari, e quindi $\mathcal{F} \cup \{P\}$ e $\mathcal{F} \cup \{D\}$ hanno entrambe la FIP (si veda la dimostrazione dell'Esercizio 1.1) da cui che ognuna di esse è contenuta in un filtro, che a sua volta è contenuto in un ultrafiltro che estende il filtro di Fréchet. Sia A il sottoinsieme di $\mathbb{N}^2$ costituito dalle coppie con prima coordinata pari e seconda coordinata dispari. Allora le fibre verticali sono

$$A_n = \{m \in \mathbb{N} : (n,m) \in A\} = \begin{cases} D & n \in P \\ \emptyset & n \in D \end{cases}:$$

allora

$$\{n \in \mathbb{N} : A_n \in \mathcal{V}\} = P \in \mathcal{U}$$

da cui che $A \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$, mentre

$$\{n \in \mathbb{N} : A_n \in \mathcal{U}\} = \emptyset \notin \mathcal{V},$$

da cui che $A \notin \mathcal{V} \otimes \mathcal{U}$. Ne consegue che $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V} \neq \mathcal{V} \otimes \mathcal{U}$.

$\square$

Esercizio 2.3. Dimostrare il teorema di Ramsey infinito per k generico, ossia: *se X è un insieme infinito, allora per ogni $k, r \in \mathbb{N}$, fissata una r-colorazione $C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_r = [X]^k$, esiste $H \subseteq X$ infinito tale che $[H]^k$ sia monocromatico.*

Dimostrazione. Senza perdita di generalità consideriamo $X = \mathbb{N}$. Infatti, essendo X infinito, X ha un sottoinsieme numerabile (e quindi identificabile con $\mathbb{N}$), e se la tesi vale per $\mathbb{N} \subseteq X$ allora vale ovviamente anche per X. Sia $\mathcal{U}$ un ultrafiltro nonprincipale su $\mathbb{N}$, e sia $\mathcal{U}^{\otimes k}$ il prodotto tensoriale di $\mathcal{U}$ k volte. Allora, si verifica facilmente che $\mathcal{U}^{\otimes k}$ è non principale e che $\Delta^+ = \left\{(a_1, ..., a_k) \in \mathbb{N}^k : a_1 < \cdots < a_k\right\}$ sta in $\mathcal{U}^{\otimes k}$. Allora, dato che Δ^+ si identifica in modo naturale con $[\mathbb{N}]^k$, abbiamo che uno degli r colori $C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_r = \Delta^+$ sta in $\mathcal{U}^{\otimes k}$. Chiamiamo C questo colore. Allora definiamo induttivamente una successione di insiemi $H^{(i)}$ e di elementi $h_i \in H^{(i)}$.

1. Dato che $C \in \mathcal{U}^{\otimes k}$, allora $H^{(1)} = \left\{n \in \mathbb{N} : C_n \in \mathcal{U}^{\otimes(k-1)}\right\} \in \mathcal{U}$, dove $C_n = \left\{(m_2, ..., m_k) \in \mathbb{N}^{k-1} : (n, m_2, ..., m_k) \in\right.$
   Scegliamo $h_1 \in H^{(1)}$.
2. Dato che $h_1 \in H^{(1)}$, allora $C_{h_1} \in \mathcal{U}^{\otimes(k-1)}$, e quindi $H^{(2)}_{h_1} = \left\{n \in \mathbb{N} : C_{h_1,n} \in \mathcal{U}^{\otimes(k-2)}\right\} \in \mathcal{U}$, dove $C_{h_1,n} = \left\{(m_3, ..., m_k) \in \mathbb{N}^{k-2} : (h_1, n, m_3, ..., m_k) \in C\right\}$. Allora possiamo prendere $h_2 \in H^{(1)} \cap H^{(2)}_{h_1} \cap (h_1, +\infty)$, in quanto tutti gli insiemi dell'intersezione stanno in $\mathcal{U}$.
3. Procediamo analogamente al caso precedente: scelti $h_1, ..., h_n$, scegliamo
$$h_{n+1} \in \bigcap_{i=0}^{k-1} \left(\bigcap_{\substack{j_1, ..., j_i \in \{1, ..., n\} \\ j_1 < \cdots < j_i}} H^{(i+1)}_{h_{j_1}, ..., h_{j_i}} \right) \cap (h_n, +\infty).$$
   Per ipotesi induttiva, tutti gli insiemi di questa intersezione stanno in $\mathcal{U}$ e quindi tale intersezione è non vuota.

Si verifica facilmente che la $H = \{h_1, h_2, ...\}$ soddisfa le richieste.

$\square$

3 Esercizi 3-3-2015

Esercizio 3.1. Dimostrare che se $(P, \leq)$ è un ordine parziale infinito, allora esiste $X \subseteq P$ infinito che è una catena o un'anticatena.

Dimostrazione. Diamo una 2-colorazione $C \sqcup N$ di $[P]^2$ in questo modo: se $\{x, y\} \in [P]^2$, allora $\{x, y\} \in C$ se e solo se $x < y$ o $y < x$. Per il Teorema di Ramsey con $r = 2$ e $k = 2$, esiste un sottoinsieme $X \subseteq P$ infinito e tale che $[X]^2$ sia monocromatico.

1. Se $[X]^2 \subseteq C$, allora questo vuol dire che per ogni $x, y \in X$ si ha $x = y$, oppure $x < y$, oppure $x > y$, ossia che X è una catena.

2. Se $[X]^2 \subseteq N$, allora questo vuol dire che per ogni $x, y \in X$, se $x \neq y$ allora $x \nless y$ e $y \nless x$, ossia x e y non sono confrontabili. Ne consegue che X è un'anticatena.

$\square$

Esercizio 3.2. Dando per buono il Teorema di Schur infinito, dimostrare la sua versione finita, ossia: *per ogni* $r \in \mathbb{N}$ *esiste* $n \in \mathbb{N}$ *tale che, comunque si scelga una* r*-colorazione di* $\{1, ..., n\}$*, esistono* $a, b \in \{1, ..., n\}$ *tali che* $a < b < a + b \leq n$ *siano monocromatici.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che la tesi sia falsa. Allora esiste $r \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, esiste una r-colorazione $C_1^{(n)} \sqcup \cdots \sqcup C_r^{(n)}$ di $\{1, ..., n\}$ che non ammette triple di Schur. Fissiamo $\mathcal{U}$ ultrafiltro non principale su $\mathbb{N}$. Per ogni $a \in \mathbb{N}$, definiamo

$$C_i(a) = \left\{n \in \mathbb{N} : a \in C_i^{(n)}\right\}$$

al variare di i in $\{1, ..., r\}$. Allora osserviamo che, per ogni $a \in \mathbb{N}$, $C_1(a) \cup \cdots \cup C_r(a) \in \mathcal{U}$: infatti, $n \notin C_i(a)$ per ogni $i \in \{1, ..., r\}$ se e solo se $a \notin C_i^{(n)}$ per ogni $i \in \{1, ..., r\}$, ossia se e solo se $a \notin \{1, ..., n\}$, ossia se e solo se $n < a$; allora, il complementare di $C_1(a) \cup \cdots \cup C_r(a)$ in $\mathbb{N}$ è finito, e quindi dato che $\mathcal{U}$ è non principale abbiamo che $C_1(a) \cup \cdots \cup C_r(a) \in \mathcal{U}$. Dato che $\mathcal{U}$ è un ultrafiltro, esisterà esattamente un $i \in \{1, ..., r\}$ tale che $C_i(a) \in \mathcal{U}$. Allora definiamo

$$D_i = \{a \in \mathbb{N} : C_i(a) \in \mathcal{U}\}$$

e, per costruzione, la famiglia $\{D_i : i \in \{1, ..., r\}\}$ è una r-colorazione di $\mathbb{N}$. Mostriamo che tale colorazione non ammette triple di Schur. Se esistessero $a < b \in \mathbb{N}$ tali che $a, b, a + b \in D_i$ per un certo $i \in \{1, ..., r\}$, allora si avrebbe $C_i(a), C_i(b), C_i(a + b) \in \mathcal{U}$: dato che $\mathcal{U}$ ha la FIP, esiste $n \in C_i(a) \cap C_i(b) \cap C_i(a + b)$, e per tale n si ha

$$a, b, a + b \in C_i^{(n)},$$

assurdo in quanto per ipotesi la r-colorazione di $\{1, ..., n\}$ data da $C_1^{(n)}, ..., C_r^{(n)}$ non aveva triple di Schur. $\square$

Esercizio 3.3. Dimostrare che il Teorema delle differenze finito (Tdf) implica il seguente: *per ogni* r*-colorazione* $\mathbb{N} = C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_r$ *di* $\mathbb{N}$*, esiste* C_i *che è un* Δ_f*-set.*

Dimostrazione. Fissiamo una r-colorazione $\mathbb{N} = C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_r$ di $\mathbb{N}$ e fissiamo m: allora, per il Tdf, esiste n tale che, per ogni r-colorazione di $\{1, ..., n\}$ esiste un certo H_m con $|H_m| = m$ e $\Delta(H_m) \subseteq \{1, ..., n\}$ monocromatico; la r-colorazione di $\mathbb{N}$ induce una r-colorazione di $\{1, ..., n\}$, e quindi tale H_m è anche monocromatico rispetto alla colorazione di $\mathbb{N}$. Fissata la scelta degli H_m per ogni $m \in \mathbb{N}$, definiamo una r-colorazione di $\mathbb{N}$ in questo modo: $m \in D_i \iff \Delta(H_m) \subseteq C_i$. Ovviamente $D_1 \sqcup \cdots \sqcup D_r = \mathbb{N}$, e quindi, per il teorema di Ramsey, uno dei D_i è infinito. Ne consegue che D_i è illimitato superiormente, e quindi esiste m arbitrariamente grande tale che $\Delta(H_m) \subseteq C_i$. Dato che $|H_m| = m$, si ha che C_i è un Δ_f-set. $\square$

Esercizio 3.4. Trovare un insieme Δ_f-set ma non Δ-set.

Dimostrazione. Qualunque insieme A avente le seguenti proprietà:

1. A *non* è sindetico;

2. se X è infinito e $\Delta(X) \subseteq A$, allora X è sindetico;

non può essere un Δ-set. Infatti, vale il seguente

Lemma 3.5. *Sia $X \subseteq \mathbb{N}$. Se X è sindetico, allora $\Delta(X)$ è sindetico.*

Dimostrazione. Sia $X = \{x_1, x_2, ...\}$ sindetico, e chiamiamo $Y = \{x_2 - x_1, x_3 - x_1, ...\}$. Allora Y è sindetico in quanto Y è un traslato di X e quindi i "buchi" di Y hanno la stessa lunghezza dei "buchi" di X. Ora, $Y \subseteq \Delta(X)$ ovviamente: dato che un insieme contenente un sindetico è ovviamente sindetico, si ha che $\Delta(X)$ è sindetico. □

Dunque, se A fosse un Δ-set, allora esisterebbe X infinito tale che $\Delta(X) \subseteq A$, da cui che, per la proprietà 3, X sarebbe sindetico, e quindi lo sarebbe anche $\Delta(X)$ per il lemma: questo è assurdo in quanto A *non* è sindetico per la proprietà 2.
Diamo ora un esempio di un Δ_f-set A che verifica le proprietà $1, 2$.
Definiamo p_1 numero primo scelto a caso, e p_{n+1} il più piccolo primo maggiore di $2np_n$. Definiamo ora

$$\begin{aligned} A_n &= \{kp_n\}_{k=1}^{n} \\ A &= \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n. \end{aligned}$$

1. A è un Δ_f-set. Infatti, preso $m \in \mathbb{N}$, l'insieme $H = \{p_m, ..., mp_m\}$ ha cardinalità m ed è tale che $\Delta(H) = \{p_m, ..., (m-1)\,p_m\} \subseteq A$.

2. A *non* è sindetico. Infatti, il massimo di A_n è np_n e il minimo di A_{n+1} è $> 2np_n$, dunque il gap tra A_n e A_{n+1} è lungo almeno np_n, che diverge al divergere di n.

3. Se X è infinito e $\Delta(X) \subseteq A$, allora X è sindetico. Infatti, siano $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots$ gli elementi di X. Allora otteniamo

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &\in A_i \\ x_3 - x_1 &\in A_j \\ x_3 - x_2 &\in A_k \end{aligned}$$

con $i, j, k \in \mathbb{N}$. Dato che $x_1 < x_2 < x_3$, si ha $x_2 - x_1 < x_3 - x_1$ e $x_3 - x_2 < x_3 - x_1$, da cui che $i \leq j$ e $k \leq j$. Inoltre, $j \neq 1$, in quanto se fosse $j = 1$ allora dovrebbe essere anche $i = k = 1$ e quindi avremmo $x_2 - x_1 = x_3 - x_1 = x_3 - x_2 = p_1$, il che è assurdo in quanto contraddice le disuguaglianze strette precedenti. Ora, dato che $x_3 - x_1 = (x_3 - x_2) + (x_2 - x_1)$, si ha

$$A_j \cap (A_k + A_i) \neq \emptyset.$$

Dato che $A_i \subseteq [p_i, ip_i]$ e $A_k \subseteq [p_k, kp_k]$, si ha $A_i + A_k \subseteq [p_i + p_k, ip_i + kp_k]$. Ora, se $i < j$ e $k < j$, allora $ip_i + kp_k \leq 2(j-1)\,p_{j-1}$ che è strettamente minore di p_j per definizione di p_j: ne consegue che che $(A_i + A_k) \cap A_j = \emptyset$. Dunque deve essere $i = j$ o $k = j$. Ma se $i = j$, allora $x_2 - x_1 = ap_j$ e $x_3 - x_1 = bp_j$ con $1 \leq a < b \leq j$, e se $x_3 - x_2 = cp_k$ con

$1 \leq c \leq k$, allora $(b-a)\,p_j = cp_k$, e essendo $j \geq k$, si ha $p_j \geq p_k > k \geq c$, da cui che $p_j|p_k$ e quindi $k = j$. Analogamente si dimostra che se $k = j$ allora $i = j$. Ne consegue che $x_2 - x_1, x_3 - x_1, x_3 - x_2 \in A_j$. Ripetendo questo ragionamento per x_2, x_3, x_4, otteniamo che $x_3 - x_2, x_4 - x_2, x_4 - x_3$ stanno tutti in un $A_{j'}$, e dato che $x_3 - x_2 \in A_j$ e gli A_u sono disgiunti a due a due, si ha che $x_3 - x_2, x_4 - x_2, x_4 - x_3 \in A_j$. Si procede analogamente sulle successive triple consecutive, e si ottiene in particolare che $x_{u+1} - x_u \in A_j$ per ogni u, da cui che $x_{u+1} - x_u \leq jp_j$ per ogni u. Ne consegue che X è sindetico.

□

Esercizio 3.6. Trovare un insieme infinito che non è un Δ_f-set.

Dimostrazione. Consideriamo $A = \{r^n\}_{n\in\mathbb{N}}$, dove r è un numero dispari ≥ 3. Mostriamo che non esistono insiemi X di 3 elementi tali che $\Delta(X) \subseteq A$. Infatti, supponiamo per assurdo che esista un tale X, e siano $x_1 < x_2 < x_3$ i suoi elementi. Allora si deve avere

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= r^a \\ x_3 - x_1 &= r^b \\ x_3 - x_2 &= r^c \end{aligned}$$

per certi $a, b, c \in \mathbb{N}$ con $a < b$ e $c < b$. Sottraendo la prima alla seconda, si ottiene che $x_3 - x_2 = r^b - r^a = r^a\left(r^{b-a} - 1\right)$, da cui che

$$r^a\left(r^{b-a} - 1\right) = r^c.$$

Ma questo è assurdo: infatti, il numero a destra è dispari, mentre il numero a sinistra è pari, e entrambi sono interi positivi. □

Esercizio 3.7. Dimostrare che le famiglie dei Δ-sets e dei Δ_f-sets sono regolari per partizioni.

Dimostrazione. Osserviamo che i Δ-sets e i Δ_f-sets sono famiglie chiuse per soprainsieme. Ne consegue che esse sono regolari per partizioni se e solo se, per ogni loro elemento e per ogni 2-colorazione di tale elemento, uno dei due colori è ancora un elemento dell'insieme.
L'idea è applicare Ramsey infinito nel caso dei Δ-sets, e Ramsey finito nel caso dei Δ_f-sets.
Sia X un Δ-set. Allora esiste H infinito tale che $\Delta(H) \subseteq X$. Siano $C_1 \sqcup C_2 = X$. Definiamo una 2-colorazione di $[H]^2$ in questo modo: per $x < y \in H$, $\{x, y\} \in R_1$ se e solo se $y - x \in C_1$, mentre $\{x, y\} \in R_2$ se e solo se $y - x \in C_2$. Per il Teorema di Ramsey, esiste un sottoinsieme infinito H' di H tale che $[H']^2$ sia monocromatico. Per definizione di R_i, si ha che $[H']^2 \subseteq R_i$ implica $\Delta(H') \subseteq C_i$. Ne consegue la tesi.
Sia X un Δ_f-set. Allora, per ogni $m \in \mathbb{N}$, esiste H con $|H| = m$ e $\Delta(H) \subseteq X$. Siano $C_1 \sqcup C_2 = X$. Per Ramsey finito, per ogni $m \in \mathbb{N}$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che, se $|H| = n$, allora comunque scelga una 2-colorazione di $[H]^2$, esiste $H' \subseteq H$ tale che $|H'| = m$ e $[H']^2$ è monocromatico. Fissato m, dimostriamo che esiste H tale che $|H| = m$ e $\Delta(H) \subseteq C_1$ oppure $\Delta(H) \subseteq C_2$. Scegliamo H' tale che $|H'| = n$ e $\Delta(H') \subseteq X$ (esiste perchè X è Δ_f-set): coloriamo $[H']^2$ come prima: per $x < y \in H'$, $\{x, y\} \in R_1$ se e solo se $y - x \in C_1$, mentre $\{x, y\} \in R_2$ se e solo se $y - x \in C_2$. Allora, per Ramsey finito con $r = k = 2$, esiste $H \subseteq H'$ tale che $|H| = m$ e $[H]^2$ sia monocromatico, ossia $\Delta(H) \subseteq C_1$ oppure $\Delta(H) \subseteq C_2$. Se si verifica il primo caso, coloriamo m con il colore D_1, mentre se si verifica il secondo caso, coloriamo m con il colore D_2. Allora D_1, D_2 è una partizione di $\mathbb{N}$, e

quindi per Ramsey infinito uno dei due insiemi, wlog D_1, è infinito. Allora C_1 è un Δ_f-set: infatti, essendo D_1 infinito, è superiormente illimitato, e quindi per ogni $m \in \mathbb{N}$ esiste $s \geq m$ tale che esista S con $|S| = s$ e $\Delta(S) \subseteq C_1$, da cui che un qualunque sottoinsieme $H \subseteq S$ tale che $|H| = m$ è tale che $\Delta(H) \subseteq C_1$. Dalla generalità di m si ha la tesi. $\square$

Esercizio 3.8. Trovare una partizione $\mathbb{N} = C_1 \sqcup C_2$ dove né C_1 né C_2 contengono progressioni aritmetiche *infinite.*

Dimostrazione. Osserviamo che un insieme che contiene una progressione aritmetica infinita è sindetico. Infatti, supponiamo che $X \subseteq \mathbb{N}$ contenga la progressione $S = \{d + kn\}_{n\in\omega}$: allora si ha

$$\mathbb{N} = \bigcup_{t<\max\{d,k+1\}} (S - t)$$

in quanto ogni elemento di $\mathbb{N}$ è o minore di d, e quindi della forma $d - t$ per un certo $t < d$, o è compreso tra $d + kn$ e $d + k(n+1) - 1$ per un certo n, e quindi è della forma $d + k(n+1) - t$ per un certo $t \in \{1, ..., k\}$. A questo punto, è sufficiente trovare una partizione di $\mathbb{N}$ in due insiemi non sindetici. Questo è facile: ad esempio, la successione definita per ricorrenza

$$\begin{aligned} x_0 &= 1 \\ x_{n+1} &= x_n + n \end{aligned}$$

definisce la partizione

$$\begin{aligned} C_1 &= \bigcup_{n\in\omega} [x_{2n+1}, x_{2n+2}] \\ C_2 &= \bigcup_{n\in\omega} [x_{2n+2}, x_{2n+3}] \end{aligned}$$

tale che i pezzi sono ovviamente entrambi non sindetici. $\square$

Esercizio 3.9. Il teorema di compattezza combinatoria dice che *se una famiglia $\mathcal{F}$ di insiemi finiti è r-regolare su un insieme X, allora è r-regolare anche su un certo sottoinsieme finito Y di X.* Usando tale teorema:

1. dimostrare che dal Teorema delle differenze infinito segue il Teorema delle differenze finito;

2. dimostrare che dal Teorema di Ramsey infinito segue il Teorema di Ramsey finito.

Dimostrazione.

1. Fissiamo m e r, e dimostriamo che esiste n tale che per ogni r-colorazione di $\{1, ..., n\}$ esiste H tale che $|H| = m$ e $\Delta(H) \subseteq \{1, ..., n\}$ è monocromatico. Sia Γ l'insieme delle r-colorazioni di $\mathbb{N}$. Il Teorema delle differenze infinito implica immediatamente che, per ogni r-colorazione γ di $\mathbb{N}$, esiste H_m^γ tale che $|H_m^\gamma| = m$ e $\Delta(H_m^\gamma)$ sia monocromatico. Questo significa che l'insieme $\mathcal{F}_m = \{\Delta(H_m^\gamma) : \gamma \in \Gamma\}$ è una famiglia di insiemi finiti r-regolare su $\mathbb{N}$. Allora, per compattezza, $\mathcal{F}_m$ è r-regolare su un certo sottoinsieme finito Y di $\mathbb{N}$. Sia n il massimo di Y. Allora $\mathcal{F}_m$ è r-regolare su $\{1, ..., n\}$: infatti, fissata una r-colorazione di $\{1, ..., n\}$, essa induce una r-colorazione di Y, e quindi rispetto a tale colorazione indotta esiste un elemento di $\mathcal{F}_m$

che è monocromatico, da cui che tale elemento è monocromatico anche rispetto alla colorazione iniziale. Ma dire che $\mathcal{F}_m$ è r-regolare su $\{1,...,n\}$ significa dire che, per ogni r-colorazione di $\{1,...,n\}$, esiste un elemento $\Delta(H_m^\gamma) \in \mathcal{F}_m$ contenuto in $\{1,...,n\}$ e monocromatico: allora H_m^γ ha cardinalità m e il suo insieme di differenze è contenuto in $\{1,...,n\}$ ed è monocromatico. Ne consegue la tesi.

2. Fissiamo m, r, k, e dimostriamo che esiste n tale che per ogni r-colorazione di $[\{1,...,n\}]^k$ esiste H tale che $|H| = m$ e $[H]^k$ è monocromatico. Sia Γ l'insieme delle r-colorazioni di $[\mathbb{N}]^k$. Il Teorema di Ramsey infinito implica immediatamente che, per ogni r-colorazione γ di $[\mathbb{N}]^k$, esiste H_m^γ tale che $|H_m^\gamma| = m$ e $[H_m^\gamma]^k$ sia monocromatico. Questo significa che l'insieme $\mathcal{F}_m = \left\{[H_m^\gamma]^k : \gamma \in \Gamma\right\}$ è una famiglia di insiemi finiti r-regolare su $[\mathbb{N}]^k$. Allora, per compattezza, $\mathcal{F}_m$ è r-regolare su un certo sottoinsieme finito Y di $[\mathbb{N}]^k$. Sia n il massimo dell'insieme contenente gli elementi delle k-uple contenute in Y. Allora $Y \subseteq [\{1,...,n\}]^k$. Ne consegue che $\mathcal{F}_m$ è r-regolare su $[\{1,...,n\}]^k$: infatti, fissata una r-colorazione di $[\{1,...,n\}]^k$, essa induce una r-colorazione di Y, e quindi rispetto a tale colorazione indotta esiste un elemento di $\mathcal{F}_m$ che è monocromatico, da cui che tale elemento è monocromatico anche rispetto alla colorazione iniziale. Ma dire che $\mathcal{F}_m$ è r-regolare su $[\{1,...,n\}]^k$ significa dire che, per ogni r-colorazione di $[\{1,...,n\}]^k$ esiste un elemento $[H_m^\gamma]^k$ contenuto in $[\{1,...,n\}]^k$ e monocromatico: allora $H_m^\gamma \subseteq \{1,...,n\}$, ha cardinalità m e $[H_m^\gamma]^k$ è monocromatico. Ne consegue la tesi.

□

4 Esercizi 9-3-2015

Esercizio 4.1. La proprietà "Compattezza Combinatoria 1" (CC1) dice che *se $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ è una famiglia di insiemi finiti r-regolare su X, allora esiste $Y \subseteq X$ finito tale che $\mathcal{F} \cap \mathcal{P}(Y)$ sia r-regolare su Y.* La proprietà "Compattezza combinatoria 2" (CC2) dice che *se $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ è una famiglia di insiemi finiti r-regolare su X, allora esiste $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ finito tale che $\mathcal{F}_0$ è r-regolare su X.* Dimostrare che CC1 $\Longleftrightarrow$ CC2.

Dimostrazione. (CC2⇒CC1) Sia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una famiglia di insiemi finiti r-regolare su X, e supponiamo che valga CC2. Allora esiste $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ finita tale che $\mathcal{F}_0$ è r-regolare su X. Sia Y l'unione degli insiemi di $\mathcal{F}_0$. Allora Y è un'unione finita di insiemi finiti contenuti in X, e quindi Y è un sottoinsieme finito di X. Inoltre, $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F} \cap \mathcal{P}(Y)$ ovviamente. Ora, fissiamo una r-colorazione di Y, e estendiamola arbitrariamente ad una r-colorazione di X. Allora esiste un elemento A di $\mathcal{F}_0$ monocromatico rispetto a tale r-colorazione. Ma $A \subseteq Y$, e quindi A è monocromatico anche come sottoinsieme di Y rispetto alla sua r-colorazione iniziale. Dato che $A \in \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F} \cap \mathcal{P}(Y)$, abbiamo che $\mathcal{F} \cap \mathcal{P}(Y)$ è r-regolare su Y, e quindi vale CC1.
(CC1⇒CC2) Sia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una famiglia di insiemi finiti r-regolare su X, e supponiamo che valga la CC1. Allora esiste $Y \subseteq X$ finito tale che $\mathcal{F} \cap \mathcal{P}(Y)$ sia r-regolare su Y. Scegliamo ora $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F} \cap \mathcal{P}(Y)$: la $\mathcal{F}_0$ è finita in quanto $\mathcal{P}(Y)$ è finito, essendo Y finito. Inoltre, fissata una r-colorazione di X, essa induce una r-colorazione su Y: allora, dato che $\mathcal{F}_0$ è r-regolare su Y, esiste un elemento $A \in \mathcal{F}_0$ monocromatico. Ma $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$, e se A è monocromatico rispetto alla colorazione indotta, allora è monocromatico anche rispetto alla colorazione originale. Ne consegue che $\mathcal{F}_0$ è r-regolare su X, e quindi vale la CC2. □

Esercizio 4.2. Sia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ chiusa per soprainsiemi.

1. Dimostrare che $\mathcal{F}$ è wPR su X se e solo se esiste un ultrafiltro $\mathcal{U}$ su X tale che $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$.

2. Dimostrare che $\mathcal{F}$ è PR se e solo se $\mathcal{F}$ è unione di ultrafiltri su X.

Dimostrazione.

1. Se esiste $\mathcal{U}$ ultrafiltro su X tale che $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$, allora $\mathcal{F}$ è wPR. Infatti, sia $r \in \mathbb{N}$ e sia $A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_r$ una r-colorazione di X: allora, essendo $\mathcal{U}$ un ultrafiltro su X, esiste $i \in \{1, ..., n\}$ tale che $A_i \in \mathcal{U}$, e quindi $A_i \in \mathcal{F}$. Viceversa, supponiamo che $\mathcal{F}$ sia wPR su X. Definiamo
$$\mathcal{S} = \{S \subseteq X : S^c \notin \mathcal{F}\}.$$
Osserviamo che $\mathcal{S}$ ha la FIP: infatti, se $S_1, ..., S_n \in \mathcal{S}$ e per assurdo fosse $S_1 \cap \cdots \cap S_n = \emptyset$, allora $S_1^c \cup \cdots \cup S_n^c = X$, da cui che dovrebbe essere $S_i^c \in \mathcal{F}$ per qualche $i \in \{1, ..., n\}$, il che è assurdo in quanto $S_i \in \mathcal{S}$ e quindi $S_i^c \notin \mathcal{F}$. Dunque esiste un ultrafiltro $\mathcal{U}$ su X che estende $\mathcal{S}$. Mostriamo che $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$. Infatti, se per assurdo esistesse $A \in \mathcal{U} \backslash \mathcal{F}$, allora, essendo $A \notin \mathcal{F}$, si avrebbe $A^c \in \mathcal{S}$, da cui $A^c \in \mathcal{U}$, assurdo.

2. Se $\mathcal{F}$ è PR, allora per ogni $A \in \mathcal{F}$ la famiglia $\mathcal{F} \cap \mathcal{P}(A)$ è wPR su A. Inoltre, essendo $\mathcal{F}$ chiusa per soprainsiemi, si ha che $\mathcal{F} \cap \mathcal{P}(A)$ è chiusa per soprainsiemi rispetto ad A. Allora, per il punto precedente, esiste un ultrafiltro $\mathcal{U}_A$ su A contenuto in $\mathcal{F} \cap \mathcal{P}(A)$. Definiamo ora $\mathcal{V}_A = \{S \subseteq X : (\exists B \in \mathcal{U}_A)(B \subseteq S)\}$. Dato che $\mathcal{U}_A$ è un filtro su A, abbiamo che $\mathcal{V}_A$ è un filtro su X. Inoltre, se $S \subseteq X$, allora abbiamo che $A = (S \cap A) \sqcup (S^c \cap A)$, e quindi essendo $\mathcal{U}_A$ un ultrafiltro su A uno dei due pezzi deve stare in $\mathcal{U}_A$. Allora, per definizione di $\mathcal{V}_A$, uno tra S e S^c deve stare in $\mathcal{V}_A$, e quindi $\mathcal{V}_A$ è un ultrafiltro su X che contiene A. Ovviamente $\mathcal{V}_A \subseteq \mathcal{F}$, in quanto $\mathcal{U}_A \subseteq \mathcal{F}$ e $\mathcal{F}$ è chiuso per soprainsiemi: allora
$$\mathcal{F} = \bigcup_{A \in \mathcal{F}} \mathcal{V}_A$$
e quindi $\mathcal{F}$ è unione di ultrafiltri su X. Viceversa, se $\mathcal{F}$ è unione di ultrafiltri su X, sia $A \in \mathcal{F}$ e sia $\mathcal{V}_A$ un ultrafiltro su X tale che $\mathcal{V}_A \subseteq \mathcal{F}$ e $A \in \mathcal{V}_A$. Allora $\mathcal{U}_A = \mathcal{V}_A \cap \mathcal{P}(A)$ è chiaramente un ultrafiltro su A, $\mathcal{U}_A \subseteq \mathcal{F} \cap \mathcal{P}(A)$, e quindi per il punto precedente si ha che $\mathcal{F} \cap \mathcal{P}(A)$ è wPR su A, e quindi, per la generalità di A, si ha che $\mathcal{F}$ è PR.

□

Esercizio 4.3. (Teorema dei tre colori) Sia $f : X \to X$ una funzione senza punti fissi. Dimostrare che la famiglia $\mathcal{F} = \{\{x, f(x)\} : x \in X\} \subseteq \mathcal{P}(X)$ *non* è 3-regolare su X, ossia che esiste un modo di 3-colorare X in modo che, per ogni x, x e $f(x)$ abbiano colore diverso.

Dimostrazione. Osserviamo che la tesi equivale al fatto che il grafo Γ su X tale che $\Gamma(x, y)$ se e solo se $f(x) = y$, è 3-colorabile, ossia che X può essere 3-colorato in modo tale che due vertici adiacenti di Γ abbiano colore diverso. Dimostriamo quindi quest'ultima proprietà.
Definiamo una relazione di equivalenza su X in questo modo: $x \sim y$ se e solo se esistono $n, m \in \omega$ tali che $f^n(x) = f^m(y)$ (con $f^0 = \mathrm{id}_X$). Verifichiamo che $\sim$ è una relazione di equivalenza. Riflessività e simmetria sono ovvie: per quanto riguarda la transitività, se $x \sim y$ e $y \sim z$, allora

esistono $n, m, p, q \in \omega$ tali che $f^n(x) = f^m(y)$ e $f^p(y) = f^q(z)$. Ora, supponiamo wlog che $m \leq p$. Allora $f^{n+p-m}(x) = f^p(y) = f^q(z)$, e quindi $x \sim z$. Chiamiamo A_x la classe di equivalenza di x modulo $\sim$. Ora, osserviamo che se $A_x \neq A_y$, allora non esistono $x_0 \in A_x, y_0 \in A_y$ tali che $\Gamma(x_0, y_0)$ o $\Gamma(y_0, x_0)$: infatti, se così fosse, allora si avrebbe $f(x_0) = y_0$ o $f(y_0) = x_0$, e quindi in entrambi i casi $x_0 \sim y_0$, da cui che $A_{x_0} = A_x = A_y = A_{y_0}$, assurdo. Questo implica che possiamo 3-colorare le varie classi di equivalenza indipendentemente l'una dall'altra, e quindi è sufficiente esibire un modo per 3-colorare una generica classe di equivalenza A_x. A tale scopo, definiamo

$$\begin{aligned} A_0 &= \left\{x, f(x), f^2(x), \ldots\right\} \\ A_{n+1} &= f^{-1}(A_n) \cup A_n. \end{aligned}$$

Chiaramente $A_n \subseteq A_{n+1}$. Dimostriamo per induzione su n che $f(A_n) \subseteq A_n$ per ogni n. Per $n = 0$ la tesi è ovvia. Supponiamola vera per n: allora $f(A_{n+1}) = f\left(f^{-1}(A_n) \cup A_n\right) = f\left(f^{-1}(A_n)\right) \cup f(A_n) \subseteq A_n \subseteq A_{n+1}$. Dimostriamo ora che A_x è l'unione degli A_n. Per induzione su n si ha che $A_n \subseteq A_x$. Infatti, $A_0 \subseteq A_x$ ovviamente, in quanto per ogni $k \in \omega$ si ha $f^k(x) \sim x$, e se $A_n \subseteq A_x$, allora se $y \in f^{-1}(A_n)$ allora $f(y) \in A_n$ e quindi $y \sim z$ per un certo $z \in A_n \subseteq A_x$, da cui che $y \sim z \sim x$. Per la generalità di y, si ha $f^{-1}(A_n) \subseteq A_x$ e quindi $A_{n+1} \subseteq A_x$. Viceversa, se $y \in A_x$, allora esistono $n, m \in \omega$ tali che $f^n(y) = f^m(x)$, da cui che $f^n(y) \in A_0$ e quindi $y \in f^{-n}(A_0) \subseteq A_n$, e quindi per la generalità di y si ha che A_x è contenuto nell'unione degli A_n.
Per concludere, 3-coloriamo A_x "induttivamente". Scegliamo una 3-colorazione di A_0 in modo che Γ ristretto ad A_0 sia 3-colorato: questa 3-colorazione di A_0 esiste sempre, in quanto Γ ristretto ad A_0 è o una "semiretta infinita" (e quindi basta usare due colori distinti alternati) oppure è un segmento iniziale finito e un ciclo finito (e quindi basta usare due colori distinti alternati per il segmento iniziale, il terzo colore per il punto in comune tra il segmento e il ciclo, e i due colori di prima alternati per i punti del ciclo). Ora, supponiamo di aver esteso la 3-colorazione di A_0 ad una 3-colorazione di A_n tale che Γ ristretto ad A_n sia un grafo 3-colorato, e mostriamo come estendere tale colorazione ai punti di $A_{n+1} \backslash A_n = f^{-1}(A_n) \backslash A_n$ in modo tale che Γ ristretto a A_{n+1} sia 3-colorato. Sia $y \in f^{-1}(A_n) \backslash A_n$. Allora $f(y) \in A_n$ e quindi sarà colorato con uno dei 3 colori: coloriamo allora y con uno dei due colori diversi dal colore di $f(y)$. Questo basta, in quanto se $y \in f^{-1}(A_n) \backslash A_n$, allora y è adiacente ad un solo vertice di A_{n+1}, ossia a $f(y) \in A_n$: difatti, ci sono solo altri due casi possibili:

1. $y = f(z)$ per un certo $z \in A_n$. Allora $y \in f(A_n) \subseteq A_n$, assurdo.
2. $y = f(y')$ per un certo $y' \in f^{-1}(A_n) \backslash A_n$. Allora $y \in f\left(f^{-1}(A_n)\right) \subseteq A_n$, assurdo.

L'unione delle 3-colorazioni appena definite sugli A_n è la 3-colorazione di A_x che cercavamo.

$\square$

Esercizio 4.4. Sia $\mathbb{F}$ un campo ordinato (quindi possiamo immergerci $\mathbb{Q}$). Le seguenti sono equivalenti:

1. $\mathbb{F}$ è archimedeo.
2. $\mathbb{N}$ è illimitato in $\mathbb{F}$.
3. $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{F}$.
4. Non esistono infinitesimi diversi da 0.

Dimostrazione. Un campo ordinato $\mathbb{F}$ è archimedeo se per ogni $0 < x < y$ in $\mathbb{F}$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $nx > y$. Inoltre, la topologia su $\mathbb{F}$ indotta dall'ordine è quella una cui base di aperti è data dagli intervalli (a, b).

1. $(1 \Rightarrow 2)$ Sia $\mathbb{F}$ archimedeo. Supponiamo per assurdo che esista $\alpha \in \mathbb{F}$ tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha $n < \alpha$. Dato che $\mathbb{F}$ è archimedeo, allora, preso $n \in \mathbb{N}$, dato che $n < \alpha$ deve esistere $m \in \mathbb{N}$ tale che $nm > \alpha$; ma $nm \in \mathbb{N}$, e quindi $nm < \alpha$ per ipotesi su α, assurdo. Ne consegue che $\mathbb{N}$ è illimitato in $\mathbb{F}$.

2. $(2 \Rightarrow 3)$ Sia $\mathbb{N}$ illimitato in $\mathbb{F}$. Per dimostrare che $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{F}$ è sufficiente dimostrare che per ogni coppia $a < b$ di elementi di $\mathbb{F}$ esiste $\lambda \in \mathbb{Q}$ tale che $a < \lambda < b$. Dato che $b > a$, si ha $b - a \neq 0$. Osserviamo che esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $b - a > \frac{1}{n}$: infatti, se fosse $b - a \leq \frac{1}{n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora avremmo $\frac{1}{b-a} \geq n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e quindi $\frac{1}{b-a}$ limiterebbe superiormente $\mathbb{N}$, assurdo. Allora $nb - na > 1$. Osserviamo ora che l'insieme $\{m \in \mathbb{N} : m \leq na\}$ è un segmento iniziale di $\mathbb{N}$ diverso da $\mathbb{N}$ stesso (in quanto $\mathbb{N}$ è illimitato), e quindi ammette massimo, diciamo m_0. Allora $na < m_0 + 1 \leq na + 1 < nb$, da cui che $a < \frac{m_0+1}{n} < b$. Ne consegue la tesi.

3. $(3 \Rightarrow 4)$ Sia $\mathbb{Q}$ denso in $\mathbb{F}$. Supponiamo per assurdo che esista un infinitesimo $\xi \neq 0$, e supponiamolo WLOG > 0. Dato che $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{F}$, esistono $p, q \in \mathbb{N}$ coprimi tali che $0 < \frac{p}{q} < \xi$; ma ξ è infinitesimo > 0, e quindi $\xi < \frac{1}{q}$, da cui che $\frac{p}{q} < \frac{1}{q}$ ossia $p < 1$, assurdo in quanto 1 è il minimo di $\mathbb{N}$.

4. $(4 \Rightarrow 1)$ Siano $0 < x < y$ in $\mathbb{F}$. Se per assurdo avessimo $nx \leq y$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora avremmo $0 < \frac{x}{y} \leq \frac{1}{n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e quindi $\frac{x}{y}$ sarebbe infinitesimo, assurdo.

□

Esercizio 4.5. Fissiamo un modello nonstandard dei reali dato da ${}^*\mathbb{R} = \frac{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}{\mathcal{U}}$. Dimostrare che ogni sottoinsieme numerabile di ${}^*\mathbb{R}$ è limitato.

Dimostrazione. Sia $X = \left\{x^{(1)}, x^{(2)}, ...\right\}$ un sottoinsieme numerabile di ${}^*\mathbb{R}$. Fissiamo i rappresentanti, ponendo $x^{(i)} = \left[\left(x_n^{(i)}\right)_{n\in\mathbb{N}}\right]$ al variare di $i \in \mathbb{N}$. Definiamo $y = \left[(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\right]$, dove

$$y_n = \max\left\{x_n^{(1)}, ..., x_n^{(n)}\right\} + 1.$$

Allora osserviamo che $y > x^{(k)}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Infatti,

$$\left\{i \in \mathbb{N} : y_i > x_i^{(k)}\right\} \supseteq \{i \in \mathbb{N} : i > k\}$$

in quanto se $i > k$ allora $y_i = \max\left\{x_i^{(1)}, ..., x_i^{(i)}\right\} + 1 > x_i^{(k)}$. Dato che $\{i \in \mathbb{N} : i > k\}$ è cofinito, appartiene a $\mathcal{U}$ in quanto $\mathcal{U}$ è non principale, e quindi anche $\left\{i \in \mathbb{N} : y_i > x_i^{(k)}\right\} \in \mathcal{U}$, da cui che $y > x^{(k)}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Ne consegue che y limita superiormente X. Si ragiona in modo analogo per limitare X inferiormente. □

Esercizio 4.6. Sia $\mathbb{F}$ un campo ordinato che estende $\mathbb{R}$. Un elemento *infinito* è un elemento $\xi \in \mathbb{F}$ tale che $|\xi| > n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Un elemento *infinitesimo* è un elemento $\xi \in \mathbb{F}$ tale che $|\xi| < \frac{1}{n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Un elemento *limitato* è un elemento non infinito. Dando per buono il fatto che, per ogni $\xi \in \mathbb{F}$ limitato, esiste un *unico* $\mathrm{st}(\xi) \in \mathbb{R}$ tale che $\xi - \mathrm{st}(\xi)$ sia infinitesimo, dimostrare che, se α e β sono limitati, allora $\alpha + \beta$ e $\alpha\beta$ sono limitati, se β non è infinitesimo allora α/β è limitato, e

$$\begin{aligned} \mathrm{st}(\alpha + \beta) &= \mathrm{st}(\alpha) + \mathrm{st}(\beta) \\ \mathrm{st}(\alpha\beta) &= \mathrm{st}(\alpha)\,\mathrm{st}(\beta) \\ \mathrm{st}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) &= \frac{\mathrm{st}(\alpha)}{\mathrm{st}(\beta)} \ (\beta \text{ non infinitesimo}). \end{aligned}$$

Dimostrazione. Diamo per buono il fatto che in un qualunque campo ordinato vale la disuguaglianza triangolare. Ora osserviamo che:

1. Somme e prodotti di limitati sono ovviamente limitati. Inoltre, se β è limitato non infinitesimo, allora $\beta \neq 0$ e anche β^{-1} è limitato e non infinitesimo. Infatti, se β è limitato non infinitesimo, allora esistono $n, m \in \mathbb{N}$ tali che $\frac{1}{n} < |\beta| < m$, e quindi $\beta \neq 0$ e $\frac{1}{m} < \left|\beta^{-1}\right| < n$, da cui che anche β^{-1} è limitato non infinitesimo.

2. Se $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ qualunque, e $\alpha - \beta$ è limitato, allora α è limitato se e solo se lo è β. Infatti, se α è limitato, allora $\beta = (\beta - \alpha) + \alpha$ che è somma di limitati e quindi è limitato.

3. Ovviamente α è infinitesimo se e solo se $-\alpha$ è infinitesimo.

4. La somma di due infinitesimi è infinitesimo. Infatti, se α e β sono infinitesimi, allora $|\alpha| < \frac{1}{2n}$ e $|\beta| < \frac{1}{2n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e quindi
$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta| < \frac{2}{2n} = \frac{1}{n}$$
per ogni $n \in \mathbb{N}$.

5. ξ è infinitesimo se e solo se $\mathrm{st}(\xi) = 0$. Infatti, essendo $\xi - \mathrm{st}(\xi)$ infinitesimo, e essendo 0 l'unico infinitesimo di $\mathbb{R}$, abbiamo che se ξ è infinitesimo allora $\mathrm{st}(\xi) = (\mathrm{st}(\xi) - \xi) + \xi$ è somma di infinitesimi e quindi è infinitesimo, quindi $\mathrm{st}(\xi) = 0$, mentre se $\mathrm{st}(\xi) = 0$, allora $\xi = (\xi - \mathrm{st}(\xi)) + \mathrm{st}(\xi)$ è somma di infinitesimi e quindi è infinitesimo.

6. Il prodotto di un infinitesimo e di un limitato è infinitesimo. Infatti, se α è infinitesimo e β è limitato, allora esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $k - 1 \leq |\beta| < k$. Dato che α è infinitesimo, si ha $|\alpha| < \frac{1}{kn}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e quindi
$$|\alpha\beta| = |\alpha|\,|\beta| < \frac{1}{kn} k = \frac{1}{n}$$
e quindi $\alpha\beta$ è infinitesimo.

Ora,
$$(\alpha + \beta) - (\mathrm{st}(\alpha) + \mathrm{st}(\beta)) = (\alpha - \mathrm{st}(\alpha)) + (\beta - \mathrm{st}(\beta))$$

che è infinitesimo perchè somma di infinitesimi, e quindi per unicità della parte standard si ha $\operatorname{st}(\alpha+\beta) = \operatorname{st}(\alpha) + \operatorname{st}(\beta)$.
Inoltre,

$$\begin{aligned}\alpha\beta - \operatorname{st}(\alpha)\operatorname{st}(\beta) &= (\alpha\beta - \alpha\operatorname{st}(\beta)) + (\alpha\operatorname{st}(\beta) - \operatorname{st}(\alpha)\operatorname{st}(\beta)) \\ &= \alpha(\beta - \operatorname{st}(\beta)) + (\alpha - \operatorname{st}(\alpha))\operatorname{st}(\beta)\end{aligned}$$

e quindi, dato che il prodotto di un infinitesimo e di un limitato è infinitesimo e dato che la somma di infinitesimi è infinitesima, per unicità della parte standard abbiamo $\operatorname{st}(\alpha+\beta) = \operatorname{st}(\alpha) + \operatorname{st}(\beta)$.
Ora, mostriamo che se β non è infinitesimo allora $\operatorname{st}\left(\beta^{-1}\right) = \operatorname{st}(\beta)^{-1}$. Innanzitutto, dato che β è limitato non infinitesimo, si ha $\beta \neq 0$ e $\operatorname{st}(\beta) \neq 0$, e inoltre β^{-1} è limitato non infinitesimo. Allora

$$\begin{aligned}\beta^{-1} - \operatorname{st}(\beta)^{-1} &= \frac{\operatorname{st}(\beta) - \beta}{\beta\operatorname{st}(\beta)} \\ &= (\operatorname{st}(\beta) - \beta)(\beta\operatorname{st}(\beta))^{-1}\end{aligned}$$

che è il prodotto di un infinitesimo e di un limitato, da cui che è infinitesimo. Per concludere, se α è limitato e β è limitato non infinitesimo, si ha

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\operatorname{st}(\alpha)}{\operatorname{st}(\beta)} &= \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\operatorname{st}(\alpha)}{\beta} + \frac{\operatorname{st}(\alpha)}{\beta} - \frac{\operatorname{st}(\alpha)}{\operatorname{st}(\beta)} \\ &= \frac{\alpha - \operatorname{st}(\alpha)}{\beta} + \operatorname{st}(\alpha)\left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\operatorname{st}(\beta)}\right)\end{aligned}$$

che è la somma di due infinitesimi e quindi è infinitesimo. Per l'unicità della parte standard si ha allora la tesi.

□

Esercizio 4.7. Fissiamo un modello nonstandard dei reali dato da ${}^*\mathbb{R} = \frac{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}{\mathcal{U}}$. Sia ${}^*\mathbb{Q} \subseteq {}^*\mathbb{R}$. Sia ${}^*\mathbb{Q}_{FIN} = \{\xi \in {}^*\mathbb{Q} : \xi \text{ limitato}\}$. Allora ${}^*\mathbb{Q}$ è un sottocampo di ${}^*\mathbb{R}$, ${}^*\mathbb{Q}_{FIN}$ è un sottoanello di ${}^*\mathbb{Q}$, l'insieme $\mathcal{I}$ degli infinitesimi di ${}^*\mathbb{Q}_{FIN}$ è un ideale di ${}^*\mathbb{Q}_{FIN}$, e si ha $\frac{{}^*\mathbb{Q}_{FIN}}{\mathcal{I}} \simeq \mathbb{R}$ (isomorfismo di campi).

Dimostrazione. Dire che $\mathbb{Q}$ è un sottocampo di $\mathbb{R}$ equivale a dire che nel modello standard è vero che $(\forall x, y \in \mathbb{R})\left(x \in \mathbb{Q} \wedge y \in \mathbb{Q} \to x - y \in \mathbb{Q} \wedge \left(y \neq 0 \to xy^{-1} \in \mathbb{Q}\right)\right)$. Allora, per Transfer, nel modello nonstandard è vero che $(\forall x, y \in {}^*\mathbb{R})\left(x \in {}^*\mathbb{Q} \wedge y \in {}^*\mathbb{Q} \to x - y \in {}^*\mathbb{Q} \wedge \left(y \neq 0 \to xy^{-1} \in {}^*\mathbb{Q}\right)\right)$, ossia che ${}^*\mathbb{Q}$ è un sottocampo di ${}^*\mathbb{R}$. Inoltre, nel precedente esercizio abbiamo già osservato che somme, differenze e prodotti di iperreali limitati sono limitati, e quindi ${}^*\mathbb{Q}_{FIN}$ è un sottoanello di ${}^*\mathbb{Q}$. Ora, dato che ${}^*\mathbb{Q}_{FIN}$ contiene solo limitati, per ogni elemento $\xi \in {}^*\mathbb{Q}_{FIN}$ è ben definito e unico il reale $\operatorname{st}(\xi)$ come l'unico reale tale che $\operatorname{st}(\xi) - \xi$ sia infinitesimo. Definiamo allora

$$\begin{aligned}\varphi : {}^*\mathbb{Q}_{FIN} &\to \mathbb{R} \\ \xi &\mapsto \operatorname{st}(\xi)\end{aligned}$$

e verifichiamo che φ è un omomorfismo suriettivo di anelli avente come nucleo $\mathcal{I}$. □

1. φ è un omomorfismo di anelli. Infatti, per l'esercizio precedente, se α, β sono limitati allora $\operatorname{st}(\alpha+\beta) = \operatorname{st}(\alpha) + \operatorname{st}(\beta)$ e $\operatorname{st}(\alpha\beta) = \operatorname{st}(\alpha)\operatorname{st}(\beta)$; inoltre, ovviamente $\operatorname{st}(1) = 1$.

2. φ è suriettivo. Infatti, essendo $\mathbb{Q}$ denso in $\mathbb{R}$, per ogni $r \in \mathbb{R}$ esiste una successione $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di razionali che converge a r. Allora l'elemento $q = \left[(q_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] \in {}^*\mathbb{R}$ è tale che $q - r$ sia infinitesimo: infatti, per ogni $n \in \mathbb{N}$ abbiamo $|q_i - r| < \frac{1}{n}$ definitivamente, dunque

$$\left\{i \in \mathbb{N} : |q_i - r| < \frac{1}{n}\right\} \in \mathcal{U}$$

in quanto è cofinito e $\mathcal{U}$ è non principale. Ne consegue che q è limitato, in quanto $q - r$ è infinitesimo e r è ovviamente limitato: inoltre, $q \in {}^*\mathbb{Q}$ ovviamente, e quindi $q \in {}^*\mathbb{Q}_{FIN}$. Per costruzione si ha $\varphi(q) = \mathrm{st}(q) = r$, e quindi per la generalità di r abbiamo che φ è suriettivo.

3. Il nucleo di φ è $\mathcal{I}$. Infatti, $\xi \in \ker\varphi \iff \mathrm{st}(\xi) = 0$, e abbiamo già visto che questo capita se e solo se ξ è infinitesimo. Allora $\mathcal{I}$ è un ideale di ${}^*\mathbb{Q}_{FIN}$, e per il primo teorema di isomorfismo si ha
$$\frac{{}^*\mathbb{Q}_{FIN}}{\mathcal{I}} \simeq \mathbb{R}.$$

5 Esercizi 10-3-2015

Esercizio 5.1. Fissiamo un modello nonstandard dei reali dato da ${}^*\mathbb{R} = \frac{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}{\mathcal{U}}$. Dimostrare che $|{}^*\mathbb{N}| = \mathfrak{c}$.

Dimostrazione. Dato che $\left|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right| = \mathfrak{c}^{\aleph_0} = \left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0\cdot\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$, abbiamo che $\mathfrak{c} = |\mathbb{R}| \leq |{}^*\mathbb{R}| \leq \mathfrak{c}$ e quindi $|{}^*\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$, da cui $|{}^*\mathbb{N}| \leq \mathfrak{c}$. Viceversa, abbiamo visto nell'esercizio precedente che

$$\mathbb{R} \simeq \frac{{}^*\mathbb{Q}_{FIN}}{\mathcal{I}}$$

e quindi certamente deve essere $|{}^*\mathbb{Q}| \geq |{}^*\mathbb{Q}_{FIN}| \geq \mathfrak{c}$. Per concludere, basta allora dimostrare che esiste una bigezione tra ${}^*\mathbb{Q}$ e ${}^*\mathbb{N}$. Osserviamo che, nel modello standard, è vero che esiste una bigezione tra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$, ossia è vero l'enunciato

$$(\exists f \in \mathcal{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{Q}))\,(\forall x \in \mathbb{N})\,(\exists! y \in \mathbb{Q})\,(f(x,y)) \land (\forall y \in \mathbb{Q})\,(\exists! x \in \mathbb{N})\,(f(x,y))$$

e quindi, per Transfer, nel modello nonstandard è vero l'enunciato

$$(\exists f \in {}^*\mathcal{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{Q}))\,(\forall x \in {}^*\mathbb{N})\,(\exists! y \in {}^*\mathbb{Q})\,(f(x,y)) \land (\forall y \in {}^*\mathbb{Q})\,(\exists! x \in {}^*\mathbb{N})\,(f(x,y)).$$

Dato che ${}^*\mathcal{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{Q}) \subseteq \mathcal{P}({}^*\mathbb{N}\times{}^*\mathbb{Q})$, il fatto che l'enunciato precedente sia vero nel modello nonstandard implica che esiste una bigezione tra ${}^*\mathbb{N}$ e ${}^*\mathbb{Q}$, come volevasi dimostrare. □

Esercizio 5.2. Sia ${}^*\mathbb{R}$ un modello nonstandard dei reali, e sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Dimostrare che:

1. Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ è continua in $x_0 \in A$ se e solo se per ogni $\xi \in {}^*A$ tale che $\xi \sim x_0$ si ha ${}^*f(\xi) \sim f(x_0)$.

2. Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ è uniformemente continua se e solo se per ogni $\alpha \sim \beta$ in ${}^*A$ si ha ${}^*f(\alpha) \sim {}^*f(\beta)$.

3. Una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua se e solo se è uniformemente continua.

Dimostrazione.

1. Sia f continua in x_0. Allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che nel modello standard valga

$$(\forall x \in A) \left(|x - x_0| < \frac{1}{m} \to |f(x) - f(x_0)| < \frac{1}{n} \right);$$

per Transfer, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che nel modello nonstandard valga

$$(\forall x \in {}^*A) \left(|x - x_0| < \frac{1}{m} \to |{}^*f(x) - f(x_0)| < \frac{1}{n} \right).$$

Sia $\xi \in {}^*A$ tale che $\xi \sim x_0$. Allora, per ogni $m \in \mathbb{N}$, si ha che $|\xi - x_0| < \frac{1}{m}$. Fissiamo $n \in \mathbb{N}$, e sia $m \in \mathbb{N}$ tale che nel modello nonstandard valga la proprietà precedente. Dato che $|\xi - x_0| < \frac{1}{m}$, allora si ha

$$|{}^*f(\xi) - f(x_0)| < \frac{1}{n}.$$

Per la generalità di n, si ha che ${}^*f(\xi) \sim f(x_0)$, come volevasi dimostrare.
Viceversa, supponiamo che per ogni $\xi \in {}^*A$ tale che $\xi \sim x_0$ si abbia ${}^*f(\xi) \sim f(x_0)$. Sia $\epsilon > 0$ numero reale. Allora nel modello nonstandard vale

$$(\exists \mu \in {}^*\mathbb{N}) (\forall \xi \in {}^*A) \left(|\xi - x_0| < \frac{1}{\mu} \to |{}^*f(\xi) - f(x_0)| < \epsilon \right):$$

infatti, basta prendere $\mu \in {}^*\mathbb{N}$ infinito, in quanto in tal caso $\frac{1}{\mu}$ è infinitesimo e quindi $|\xi - x_0| < \frac{1}{\mu}$ implica $\xi \sim x_0$, da cui ${}^*f(\xi) \sim f(x_0)$ e quindi $|{}^*f(\xi) - f(x_0)| < \epsilon$. Allora, per Transfer, nel modello standard vale

$$(\exists m \in \mathbb{N}) (\forall x \in A) \left(|x - x_0| < \frac{1}{m} \to |f(x) - f(x_0)| < \epsilon \right)$$

e quindi per la generalità di $\epsilon > 0$ si ha che la f è continua in x_0.

2. Sia f uniformemente continua. Allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che nel modello standard valga

$$(\forall x, y \in A) \left(|x - y| < \frac{1}{m} \to |f(x) - f(y)| < \frac{1}{n} \right);$$

per Transfer, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che nel modello nonstandard valga

$$(\forall \alpha, \beta \in {}^*A) \left(|\alpha - \beta| < \frac{1}{m} \to |{}^*f(\alpha) - {}^*f(\beta)| < \frac{1}{n} \right).$$

Siano $\alpha \sim \beta$ in ${}^*A$ e fissiamo $n \in \mathbb{N}$: sia $m \in \mathbb{N}$ tale che m, n rispettino l'enunciato precedente. Allora, dato che $|\alpha - \beta| < \frac{1}{k}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, si ha

$$|{}^*f(\alpha) - {}^*f(\beta)| < \frac{1}{n}.$$

Per la generalità di $n \in \mathbb{N}$, si ha che ${}^*f(\alpha) \sim {}^*f(\beta)$ come volevasi dimostrare.
Viceversa, supponiamo che per ogni $\alpha, \beta \in {}^*A$ tali che $\alpha \sim \beta$ si abbia ${}^*f(\alpha) \sim {}^*f(\beta)$. Sia $\epsilon > 0$ numero reale. Allora nel modello nonstandard vale

$$(\exists \mu \in {}^*\mathbb{N})(\forall \alpha, \beta \in {}^*A)\left(|\alpha - \beta| < \frac{1}{\mu} \to |{}^*f(\alpha) - {}^*f(\beta)| < \epsilon\right):$$

infatti, basta prendere μ ipernaturale infinito come nel punto precedente. Allora, per Transfer, nel modello standard vale

$$(\exists m \in \mathbb{N})(\forall x, y \in A)\left(|x - y| < \frac{1}{m} \to |f(x) - f(y)| < \epsilon\right)$$

e quindi per la generalità di $\epsilon > 0$ si ha che la f è uniformemente continua.

3. Sia $A = [a, b]$. Sfruttando i punti precedenti, dimostriamo che per ogni $\xi \in {}^*A$ si ha che $x_0 \sim \xi$ implica $f(x_0) \sim {}^*f(\xi)$ se e solo se per ogni $\alpha, \beta \in {}^*A$ si ha che $\alpha \sim \beta$ implica ${}^*f(\alpha) \sim {}^*f(\beta)$. La direzione $\Leftarrow$ è ovvia. Per quanto riguarda la direzione $\Rightarrow$, ricordiamo che dato che

$$A = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

allora

$${}^*A = \{x \in {}^*\mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

e quindi gli elementi di ${}^*A$ sono limitati: per la precisione, se $\alpha \in {}^*A$, allora $\mathrm{st}(\alpha) \in A$. Allora, per ogni $\alpha, \beta \in {}^*A$, si ha che se $\alpha \sim \beta$ allora $\alpha \sim \mathrm{st}(\alpha) = \mathrm{st}(\beta) \sim \beta$, e quindi ${}^*f(\alpha) \sim f(\mathrm{st}(\alpha)) = f(\mathrm{st}(\beta)) \sim {}^*f(\beta)$.

□

6 Esercizi 16-3-2015

Esercizio 6.1. Fissiamo un modello nonstandard dei reali dato da ${}^*\mathbb{R} = \frac{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}{\mathcal{U}}$. Dimostrare che la coinizialità di ${}^*\mathbb{N} \backslash \mathbb{N}$ è più che numerabile.

Dimostrazione. Sia $X \subseteq {}^*\mathbb{N} \backslash \mathbb{N}$ numerabile, e dimostriamo che X *non* è coiniziale in ${}^*\mathbb{N} \backslash \mathbb{N}$, ossia che esiste $\xi \in {}^*\mathbb{N} \backslash \mathbb{N}$ tale che per ogni $\alpha \in X$ si abbia $\xi < \alpha$. Osserviamo innanzitutto che $\xi \in {}^*\mathbb{N} \backslash \mathbb{N}$ se e solo se $\xi \in {}^*\mathbb{N}$ e $\xi > n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, ossia ξ è infinito. Infatti, se per esempio $\xi \leq n$, allora nel modello standard vale $(\xi = 1) \vee \cdots \vee (\xi = n)$, e quindi per Transfer questo vale anche nel modello nonstandard, da cui $\xi \in \mathbb{N}$.
Fissiamo ora dei rappresentanti per gli elementi di X: poniamo $X = \left\{x^{(i)}\right\}_{i \in \mathbb{N}}$, con $x^{(i)} = \left[\left(x_j^{(i)}\right)_{j \in \mathbb{N}}\right]$ e WLOG $x_j^{(i)} \in \mathbb{N}$ per ogni $i, j \in \mathbb{N}$. Definiamo ora

$$A^{(n)} \quad = \quad \left\{j \in \mathbb{N} : \left(x_j^{(1)} \geq n\right) \wedge \cdots \wedge \left(x_j^{(n)} \geq n\right)\right\}.$$

Osserviamo che $A^{(n)} \in \mathcal{U}$: infatti, per ogni $i \in \mathbb{N}$, $\left\{j \in \mathbb{N} : x_j^{(i)} \geq n\right\} \in \mathcal{U}$ in quanto gli $x^{(i)}$ sono tutti infiniti: allora, dato che ogni $A^{(n)}$ è un'intersezione finita di insiemi di questo tipo, ogni $A^{(n)}$ sta in $\mathcal{U}$. Osserviamo che si ha la seguente catena di inclusioni facili da verificare:

$$\mathbb{N} = A^{(1)} \supseteq A^{(2)} \supseteq A^{(3)} \supseteq \cdots .$$

Allora è ben definita la seguente successione $(\xi_j)_{j\in\mathbb{N}}$: per ogni $j \in A^{(n)} \backslash A^{(n+1)}$, poniamo

$$\xi_j = \min\left\{x_j^{(1)}, ..., x_j^{(n)}\right\}.$$

Sia $\xi = \left[(\xi_j)_{j\in\mathbb{N}}\right]$. Allora:

1. Si ha $\xi \geq n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Per dimostrarlo, basta far vedere che $\{j \in \mathbb{N} : \xi_j \geq n\} \supseteq A^{(n)}$, in quanto $A^{(n)} \in \mathcal{U}$.
   Se $j \in A^{(n)}$, allora $\xi_j = \min\left\{x_j^{(1)}, ..., x_j^{(n)}\right\}$; ma, per definizione di $A^{(n)}$, si ha $x_j^{(1)} \geq n \wedge \cdots \wedge x_j^{(n)} \geq n$, e quindi $\xi_j \geq n$.

2. Si ha $\xi \leq x^{(n)}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Per dimostrarlo, basta far vedere che $\left\{j \in \mathbb{N} : \xi_j \leq x_j^{(n)}\right\} \supseteq A^{(n)}$, in quanto $A^{(n)} \in \mathcal{U}$.
   Se $j \in A^{(n)}$, allora $\xi_j = \min\left\{x_j^{(1)}, ..., x_j^{(n)}\right\}$; ma, per definizione di $A^{(n)}$, si ha $\xi_j \leq x_j^{(n)}$

A questo punto l'elemento $\xi - 1$ soddisfa la tesi: infatti, si ha $\xi - 1 < \xi \leq x^{(n)}$ per ogni n, e inoltre $\xi - 1 \geq n - 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, da cui che $\xi - 1 > n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e quindi $\xi - 1 \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$.

□

Esercizio 6.2. Fissiamo un modello nonstandard dei reali dato da ${}^*\mathbb{R} = \frac{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}{\mathcal{U}}$. Sia $\nu \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$. Sia $[1, \nu] = \{\alpha \in {}^*\mathbb{N} : 1 \leq \alpha \leq \nu\}$. Dimostrare che $|[1, \nu]| = \mathfrak{c}$.

Dimostrazione. Abbiamo già visto che $|{}^*\mathbb{N}| = \mathfrak{c}$, e quindi $|[1, \nu]| \leq \mathfrak{c}$. Per dimostrare la disuguaglianza opposta, ragioniamo come segue. Ricordiamo che l'intervallo $(0, 1) \subseteq \mathbb{R}$ ha cardinalità $\mathfrak{c}$, e quindi è sufficiente trovare una mappa iniettiva da $(0, 1)$ a $[1, \nu]$. Fissiamo un rappresentante $\left[(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}\right] = \nu$, con WLOG $\nu_n \in \mathbb{N}$. Definiamo ora

$$\begin{array}{rcl} \varphi : (0,1) & \to & [1, \nu] \\ \alpha & \mapsto & \left[(\lceil \nu_n^\alpha \rceil)_{n\in\mathbb{N}}\right] \end{array}$$

dove $\lceil \nu_n^\alpha \rceil$ denota il minimo dei maggioranti di ν_n^α in $\mathbb{N}$. Per concludere, basta verificare che φ è ben definita e iniettiva.

1. Ovviamente $\varphi(\alpha) \in {}^*\mathbb{N}$ per ogni $\alpha \in (0, 1)$, in quanto per definizione $\lceil r \rceil \in \mathbb{N}$ per ogni $r \in \mathbb{R}^+$. Ora, fissato $\alpha \in (0, 1)$, dimostriamo che $\varphi(\alpha) \leq \nu$. Dato che $\nu_n^\alpha \leq \nu_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha anche $\lceil \nu_n^\alpha \rceil \leq \nu_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, da cui che $\varphi(\alpha) \leq \nu$. Ne consegue che φ è ben definita.

2. φ è iniettiva. Infatti, siano $\alpha < \beta \in (0,1)$. Dimostriamo che $\varphi(\alpha) < \varphi(\beta)$, ossia che esiste un insieme $A \in \mathcal{U}$ tale che
$$(\forall n \in A)\left(\lceil \nu_n^\alpha \rceil < \lceil \nu_n^\beta \rceil\right).$$
Osserviamo che, se per un certo $n \in \mathbb{N}$ si ha $\nu_n^\beta - \nu_n^\alpha > 1$, allora sicuramente si ha $\lceil \nu_n^\beta \rceil > \lceil \nu_n^\alpha \rceil$. Dunque è sufficiente trovare un $A \in \mathcal{U}$ tale che, per ogni $n \in A$, si abbia $\nu_n^\beta - \nu_n^\alpha > 1$. Consideriamo la funzione
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto x^\beta - x^\alpha : \end{aligned}$$
la f è strettamente crescente e superiormente illimitata, e quindi esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n \geq N$, si abbia $f(n) > 1$. Ora, dato che ν è infinito, esiste $A \in \mathcal{U}$ tale che, per ogni $n \in A$, si abbia $\nu_n \geq N$. Allora, se $n \in A$, si ha $\nu_n^\beta - \nu_n^\alpha = f(\nu_n) > 1$. Ne consegue la tesi.

□

Nei prossimi esercizi servirà il seguente

Lemma. *Siano $f, g : I \to J$, e sia $\mathcal{U}$ un ultrafiltro su I. Diremo che $f \equiv_\mathcal{U} g$ se e solo se $\{i \in I : f(i) = g(i)\} \in \mathcal{U}$. Allora, se $f \equiv_\mathcal{U} g$ allora $f_*(\mathcal{U}) = g_*(\mathcal{U})$.*

Dimostrazione. Chiamiamo $A = \{i \in I : f(i) = g(i)\}$: allora $f \equiv_\mathcal{U} g$ equivale ad $A \in \mathcal{U}$. Mostriamo che $f_*(\mathcal{U}) \subseteq g_*(\mathcal{U})$: la tesi allora sarà vera per simmetria. Sia $X \in f_*(\mathcal{U})$: allora $f^{-1}(X) \in \mathcal{U}$, e quindi $A \cap f^{-1}(X) \in \mathcal{U}$. Osserviamo ora che $A \cap f^{-1}(X) \subseteq g^{-1}(X)$: infatti, se $x \in A \cap f^{-1}(X)$, allora $f(x) = g(x)$ e $f(x) \in X$, da cui che $g(x) \in X$ e quindi $x \in g^{-1}(X)$. Dato che $\mathcal{U}$ è chiuso per soprainsiemi, si ha che $g^{-1}(X) \in \mathcal{U}$, e quindi $X \in g_*(\mathcal{U})$. □

Esercizio 6.3. Sia $f : I \to I$ e sia $\mathcal{U}$ un ultrafiltro su I. Dimostrare che $f_*(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$ se e solo se $f \equiv_\mathcal{U} \mathrm{id}$.

Dimostrazione. ($\Leftarrow$) Per il lemma precedente, se $f \equiv_\mathcal{U} \mathrm{id}$, allora $f_*(\mathcal{U}) = \mathrm{id}_*(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$.
($\Rightarrow$) Sia $f_*(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$. Dimostriamo che $f \equiv_\mathcal{U} \mathrm{id}$. Supponiamo per assurdo che $f \not\equiv_\mathcal{U} \mathrm{id}$: allora, se $F = \{i \in I : f(i) = i\}$ è l'insieme dei punti fissi di f, allora $F \notin \mathcal{U}$, e quindi $F^c \in \mathcal{U}$. Definiamo $g : I \to I$ tale che $g_{|F^c} = f_{|F^c}$ e $g(i) \neq i$ per ogni $i \in F$. Allora, dato che f e g coincidono su un insieme $\mathcal{U}$-grande, si ha che $f \equiv_\mathcal{U} g$ e quindi $g_*(\mathcal{U}) = f_*(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$. Inoltre, g non ha punti fissi: infatti, se $i \notin F$, allora $g(i) = f(i) \neq i$, mentre se $i \in F$ allora $g(i) \neq i$ per definizione. In un esercizio precedente, abbiamo visto che esiste una 3-colorazione $C_1 \sqcup C_2 \sqcup C_3 = I$ tale che, per ogni $i \in I$, i e $g(i)$ appartengano a colori diversi. Ora, dato che $\mathcal{U}$ è un ultrafiltro, possiamo supporre che WLOG $C_1 \in \mathcal{U}$, da cui $C_2 \cup C_3 \notin \mathcal{U}$. Ora, dato che $g_*(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$ e $C_1 \in \mathcal{U}$, allora $g^{-1}(C_1) \in \mathcal{U}$: ma $g^{-1}(C_1) \subseteq C_2 \cup C_3$, in quanto se $g(x) \in C_1$ allora $x \notin C_1$ per definizione dei C_i; ne consegue che $C_2 \cup C_3 \in \mathcal{U}$, assurdo. □

Esercizio 6.4. Siano $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}$ ultrafiltri su I, J, K rispettivamente.

1. Se $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$ e $\mathcal{V} \leq \mathcal{W}$, allora $\mathcal{U} \leq \mathcal{W}$.

2. Supponiamo che I, J siano infiniti e $|I| = |J|$. Allora $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$ e $\mathcal{V} \leq \mathcal{U}$ se e solo se esiste una bigezione $f : I \to J$ tale che $f_*(\mathcal{U}) = \mathcal{V}$.

Dimostrazione. Ci serve il seguente

Lemma. *Siano $f : I \to J$ e $g : J \to K$. Allora $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{U}$ un ultrafiltro su I, sia $\mathcal{V} = f_* (\mathcal{U})$ e sia $\mathcal{W} = g_* (\mathcal{V})$. Vogliamo dimostrare che $(g \circ f)_* (\mathcal{U}) = \mathcal{W}$. Sia $X \in (g \circ f)_* (\mathcal{U})$. Allora $(g \circ f)^{-1} (X) = f^{-1} \left(g^{-1} (X)\right) \in \mathcal{U}$, e dunque $g^{-1} (X) \in f_* (\mathcal{U}) = \mathcal{V}$, da cui che $X \in g_* (\mathcal{V}) = \mathcal{W}$. Dunque $(g \circ f)_* (\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{W}$, e dato che sono entrambi ultrafiltri vale anche l'uguaglianza. $\square$

Ora possiamo risolvere l'esercizio.

1. Se $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$ e $\mathcal{V} \leq \mathcal{W}$, allora esistono $f : J \to I$ e $g : K \to J$ tali che $f_* (\mathcal{V}) = \mathcal{U}$ e $g_* (\mathcal{W}) = \mathcal{V}$. Allora $(f \circ g)_* (\mathcal{W}) = f_* (g_* (\mathcal{W})) = f_* (\mathcal{V}) = \mathcal{U}$, e quindi $\mathcal{U} \leq \mathcal{W}$.

2. Se esiste una bigezione $f : I \to J$ tale che $f_* (\mathcal{U}) = \mathcal{V}$, allora chiaramente $\mathcal{V} \leq \mathcal{U}$; inoltre, sia $g : J \to I$ l'inversa di f: allora $g_* (\mathcal{V}) = g_* (f_* (\mathcal{U})) = (g \circ f)_* (\mathcal{U}) = (\mathrm{id}_I)_* (\mathcal{U}) = \mathcal{U}$, e quindi $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$.
   Viceversa, supponiamo che $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$ e $\mathcal{V} \leq \mathcal{U}$. Allora esistono $f : I \to J$ e $g : J \to I$ tali che $f_* (\mathcal{U}) = \mathcal{V}$ e $g_* (\mathcal{V}) = \mathcal{U}$. Allora abbiamo $(g \circ f)_* (\mathcal{U}) = \mathcal{U}$ e $(f \circ g)_* (\mathcal{V}) = \mathcal{V}$, da cui che, per l'esercizio precedente, si ha $(g \circ f) \equiv_{\mathcal{U}} \mathrm{id}_I$ e $(f \circ g) \equiv_{\mathcal{V}} \mathrm{id}_J$. Questo vuol dire che esistono $A \in \mathcal{U}$ e $B \in \mathcal{V}$ tali che $(g \circ f)(a) = a$ per ogni $a \in A$ e $(f \circ g)(b) = b$ per ogni $b \in B$. Osserviamo ora che la restrizione $f : g (B) \to B$ è biunivoca. Infatti, siano $x_1 \neq x_2 \in g (B)$: allora $x_1 = g (b_1)$ e $x_2 = g (b_2)$ per certi $b_1 \neq b_2 \in B$, e quindi $f (x_1) = b_1 \neq b_2 = f (x_2)$, da cui che $f_{|g(B),B}$ è iniettiva; inoltre, se $b \in B$, allora $b = f (g (b))$, da cui che $f_{|g(B),B}$ è suriettiva. Osserviamo inoltre che $g (B) \in \mathcal{U}$: infatti, $g^{-1} (g (B)) \supseteq B \in \mathcal{V}$ e quindi $g (B) \in g_* (\mathcal{V}) = \mathcal{U}$. Ora, l'obiettivo è trovare una $\tilde{f} : I \to J$ tale che $\tilde{f} \equiv_{\mathcal{U}} f$ e $\tilde{f}$ sia biunivoca: in questo modo, dato che $\tilde{f} \equiv_{\mathcal{U}} f \Rightarrow \tilde{f}_* (\mathcal{U}) = f_* (\mathcal{U}) = \mathcal{V}$, abbiamo finito. Rinominiamo $C = g (B)$, e osserviamo che dato che $f : C \to B$ è biunivoca si ha $|C| = |B|$. Ora consideriamo due casi.

   (a) $|C| < |I|$. Allora $|B| < |I| = |J|$, e quindi dato che $|I| = |C| + |C^c|$ e $|J| = |B| + |B^c|$, deve essere $|C^c| = |I| = |J| = |B^c|$. Allora esiste una bigezione $\varphi : C^c \to B^c$. Definiamo

   $$\begin{aligned} \tilde{f} : I &\to J \\ x &\mapsto \begin{cases} f (x) & x \in C \\ \varphi (x) & x \in C^c \end{cases} \end{aligned}$$

   e osserviamo che la $\tilde{f}$ così definita è biunivoca in quanto incollamento di due funzioni biunivoche, e inoltre $\tilde{f} \equiv_{\mathcal{U}} f$ in quanto $\tilde{f}$ e f coincidono su C che è un insieme $\mathcal{U}$-grande.

   (b) $|C| = |I|$. Dato che I è infinito, esiste una partizione $C_1 \sqcup C_2 = C$ tale che $|C_1| = |C_2| = |C| = |I|$. Dato che $f : C \to B$ è una bigezione, essa induce una partizione $B_1 \sqcup B_2 = B$ con $B_i = f (C_i)$, e quindi $|B_1| = |B_2| = |B| = |I|$. Dato che $C \in \mathcal{U}$, possiamo supporre WLOG $C_1 \in \mathcal{U}$. Osserviamo ora che $f : C_1 \to B_1$ è una bigezione per definizione, e inoltre $|C_1^c| = |C_2| + |C^c| = |I| = |B_2| + |B^c| = |B_1^c|$. Allora esiste una bigezione $\varphi : C_1^c \to B_1^c$. Definiamo

   $$\begin{aligned} \tilde{f} : I &\to J \\ x &\mapsto \begin{cases} f (x) & x \in C_1 \\ \varphi (x) & x \in C_1^c \end{cases} \end{aligned}$$

e osserviamo che la $\tilde{f}$ così definita è biunivoca in quanto incollamento di due funzioni biunivoche, e inoltre $\tilde{f} \equiv_{\mathcal{U}} f$ in quanto $\tilde{f}$ e f coincidono su C_1 che è un insieme $\mathcal{U}$-grande.

□

7 Esercizi 23-3-2015

Nota. Per definizione, dato $\alpha \in {}^*\mathbb{R}$ limitato, si definisce $\mathrm{st}\,(\alpha)$ come l'*unico* numero reale tale che $\alpha - \mathrm{st}\,(\alpha)$ sia infinitesimo. Estendiamo la notazione al caso in cui α sia illimitato: se $\alpha > n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora poniamo $\mathrm{st}\,(\alpha) = +\infty$; se $\alpha < -n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora poniamo $\mathrm{st}\,(\alpha) = -\infty$. Estendiamo l'ordine di $\mathbb{R}$ su $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ in modo usuale.

Esercizio 7.1. Sia ${}^*\mathbb{R}$ un modello nonstandard dei reali. Sia $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una successione di reali, e sia $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Dimostrare che $a\,(n) \to l$ se e solo se per ogni $\nu \in {}^*\mathbb{N} \backslash \mathbb{N}$ vale $\mathrm{st}\,({}^*a\,(\nu)) = l$.

Dimostrazione. Dimostriamolo nel caso in cui l sia finito. I casi $l = \pm\infty$ sono analoghi.
($\Rightarrow$) Se $a\,(n) \to l$, allora per ogni $\epsilon > 0$ esiste $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall n \in \mathbb{N}\,(n \geq N_\epsilon \to |a\,(n) - l| < \epsilon)\,.$$

Per il Transfer, si ha

$$\forall \nu \in {}^*\mathbb{N}\,(\nu \geq N_\epsilon \to |{}^*a\,(\nu) - l| < \epsilon)\,.$$

Ora, se $\nu \in {}^*\mathbb{N} \backslash \mathbb{N}$, si ha che $\nu \geq N_\epsilon$ per ogni $\epsilon > 0$ (in quanto $N_\epsilon \in \mathbb{N}$), e quindi $|{}^*a\,(\nu) - l| < \epsilon$ per ogni $\epsilon > 0$, da cui che ${}^*a\,(\nu) - l$ è infinitesimo, ossia ${}^*a\,(\nu) \sim l$.
($\Leftarrow$) Se ${}^*a\,(\nu) \sim l$ per ogni $\nu \in {}^*\mathbb{N} \backslash \mathbb{N}$, allora, per ogni $\epsilon > 0$, è vero che

$$(\exists N \in {}^*\mathbb{N})\,(\forall \nu \in {}^*\mathbb{N})\,(\nu \geq N \to |{}^*a\,(\nu) - l| < \epsilon) :$$

infatti, basta prendere $N \in {}^*\mathbb{N} \backslash \mathbb{N}$. Per il Transfer, abbiamo che

$$(\exists N \in \mathbb{N})\,(\forall n \in \mathbb{N})\,(n \geq N \to |a\,(n) - l| < \epsilon)$$

ossia che $a\,(n) \to l$. □

Esercizio 7.2. Sia ${}^*\mathbb{R}$ un modello nonstandard dei reali. Sia $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una successione di reali. Dimostrare che, dato $s \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, a ha una sottosuccessione convergente ad s se e solo se esiste $\nu \in {}^*\mathbb{N} \backslash \mathbb{N}$ tale che $\mathrm{st}\,({}^*a\,(\nu)) = s$.

Dimostrazione. Dimostriamolo nel caso in cui s sia finito. I casi $s = \pm\infty$ sono analoghi. Ricordiamo inoltre la seguente proprietà generale: se $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$ e $f : A \to B, g : B \to C$, allora ${}^*(g \circ f) = {}^*g \circ {}^*f : {}^*A \to {}^*C$.
($\Rightarrow$) Supponiamo che esista una sottosuccessione di a convergente ad s. Allora esiste una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ crescente tale che la successione $b = a \circ f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ converge a s. Per l'esercizio precedente, abbiamo che per ogni $\nu \in {}^*\mathbb{N} \backslash \mathbb{N}$ si ha ${}^*b\,(\nu) \sim s$, ossia ${}^*a\,({}^*f\,(\nu)) \sim s$. Per concludere basta dimostrare che se $\nu \in {}^*\mathbb{N} \backslash \mathbb{N}$, allora anche ${}^*f\,(\nu) \in {}^*\mathbb{N} \backslash \mathbb{N}$. Ma questo è ovvio: infatti, f è crescente, e quindi lo è anche ${}^*f$ per Transfer, per cui deve essere ${}^*f\,(\nu) \geq n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e dunque ${}^*f\,(\nu) \in {}^*\mathbb{N} \backslash \mathbb{N}$.

($\Leftarrow$) Supponiamo che ${}^*a(\nu) \sim s$ per un certo $\nu \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$. Allora, per ogni $\epsilon \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ con $\epsilon > 0$, si ha

$$\exists \xi \in {}^*\mathbb{N}\,(\xi > n \wedge |{}^*a(\xi) - s| < \epsilon):$$

infatti, basta prendere $\xi = \nu$. Ora, per il Transfer, si ha

$$\exists m \in \mathbb{N}\,(m > n \wedge |a(m) - s| < \epsilon).$$

Definiamo allora induttivamente

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ 1 & \mapsto & \min\{m \in \mathbb{N} : |a(n) - s| < 1\} \\ k+1 & \mapsto & \min\left\{m \in \mathbb{N} : m > f(k) \wedge |a(m) - s| < \dfrac{1}{k+1}\right\}. \end{array}$$

La funzione f è ben definita in quanto gli insiemi di cui si prende il minimo sono tutti non vuoti, per la proprietà appena dimostrata con il Transfer. Inoltre, la f è chiaramente crescente. Per concludere mostriamo che $a \circ f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ è una successione convergente a s. Per ogni $k \in \mathbb{N}$, si ha

$$|(a \circ f)(k) - s| < \frac{1}{k}$$

per costruzione: allora, per confronto, si ha che $a \circ f$ è convergente a s, come volevasi dimostrare. □

Esercizio 7.3. Sia ${}^*\mathbb{R}$ un modello nonstandard dei reali. Sia $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una successione di reali. Allora

$$\begin{array}{rcl} \limsup\limits_{n\to\infty}(a(n)) & = & \max\{\mathrm{st}({}^*a(\nu)) : \nu \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}\} \\ \liminf\limits_{n\to\infty}(a(n)) & = & \min\{\mathrm{st}({}^*a(\nu)) : \nu \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}\} \end{array}$$

(dove i valori precedenti si intendono in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$).

Dimostrazione. Ricordiamo che, data una successione $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ di reali, l'insieme dei limiti di sottosuccessioni di x ammette massimo e minimo in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$: il massimo coincide con il limite superiore di x, e il minimo coincide con il limite inferiore. Allora la tesi discende direttamente dall'esercizio precedente. □

Osservazione. Sia ${}^*\mathbb{R}$ un modello nonstandard dei reali. Prima di svolgere l'esercizio successivo, facciamo qualche precisazione. Ricordiamo che, se A è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, allora l'insieme dei sottoinsiemi interni di ${}^*A$ è la famiglia ${}^*\mathcal{P}(A)$. Ora, sia $FIN \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ l'insieme dei sottoinsiemi finiti di $\mathbb{N}$. Indichiamo con ${}^*FIN$ l'insieme dei sottoinsiemi *iperfiniti* di ${}^*\mathbb{N}$. Osserviamo che:

1. Dato che $FIN \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$, per Transfer si ha ${}^*FIN \subseteq {}^*\mathcal{P}(\mathbb{N})$, e quindi gli insiemi iperfiniti sono sottoinsiemi interni di ${}^*\mathbb{N}$.

2. Per ogni $\nu \in {}^*\mathbb{N}$, l'insieme $[1, \nu]$ è iperfinito. Infatti, nel modello standard vale

$$(\forall n \in \mathbb{N})\,([1, n] \in FIN)$$

e quindi nel modello nonstandard vale

$$(\forall \nu \in {}^*\mathbb{N})\,([1, \nu] \in {}^*FIN).$$

3. Dato che, per ogni $A \in FIN$, esiste un naturale $n \in \mathbb{N}$ e una bigezione di A con $[1, n]$, allora, per Transfer, per ogni $A \in {}^*FIN$ esiste un ipernaturale $\nu \in {}^*\mathbb{N}$ e una bigezione interna di A con $[1, \nu]$. Per la precisione, la mappa "cardinalità" $|\cdot| : FIN \to \mathbb{N}$ soddisfa l'enunciato

$$(\forall A \in FIN) \, (\exists f \in \mathcal{P}\, (\mathbb{N} \times \mathbb{N})) \, (f \text{ è una bigezione tra } A \text{ e } [1, |A|]) \, ;$$

allora, per Transfer, la mappa ${}^*|\cdot| : {}^*FIN \to {}^*\mathbb{N}$ soddisfa l'enunciato con quantificatori limitati

$$(\forall A \in {}^*FIN) \, (\exists f \in {}^*\mathcal{P}\, (\mathbb{N} \times \mathbb{N})) \, (f \text{ è una bigezione tra } A \text{ e } [1, {}^*|A|]) \, .$$

La funzione ${}^*|\cdot| : {}^*FIN \to {}^*\mathbb{N}$ verrà chiamata *ipercardinalità*.

4. Se A è un sottoinsieme interno di ${}^*\mathbb{N}$ e A è contenuto in un insieme iperfinito, allora A è iperfinito. Infatti, vale l'enunciato

$$(\forall A \in \mathcal{P}\, (\mathbb{N})) \, [(\exists B \in FIN) \, (A \subseteq B) \to A \in FIN]$$

e quindi, per Transfer, vale l'enunciato

$$(\forall A \in {}^*\mathcal{P}\, (\mathbb{N})) \, [(\exists B \in {}^*FIN) \, (A \subseteq B) \to A \in {}^*FIN] \, .$$

Dato che gli interni sono chiusi per intersezione, si ha quindi che, se B è un sottoinsieme interno di ${}^*\mathbb{N}$ e $\nu \in {}^*\mathbb{N}$, allora $B \cap [1, \nu]$ è iperfinito.

Esercizio 7.4. Sia ${}^*\mathbb{R}$ un modello nonstandard dei reali. Sia $A \subseteq \mathbb{N}$. Dimostrare che

$$\overline{d}\,(A) = \max \left\{ \mathrm{st} \left(\frac{{}^*|{}^*A \cap [1, \nu]|}{\nu} \right) : \nu \in {}^*\mathbb{N} \backslash \mathbb{N} \right\} .$$

Dimostrazione. Sia

$$\begin{array}{rcl} a : \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & \dfrac{|A \cap [1, n]|}{n} \end{array} :$$

allora per definizione si ha

$$\overline{d}\,(A) = \limsup_{n \to \infty} \, (a\,(n)) \, .$$

Applicando l'esercizio precedente, si ha

$$\overline{d}\,(A) = \max \left\{ \mathrm{st}\,({}^*a\,(\nu)) : \nu \in {}^*\mathbb{N} \backslash \mathbb{N} \right\} :$$

allora, per concludere, è sufficiente far vedere che per ogni $\nu \in {}^*\mathbb{N}$ si ha

$${}^*a\,(\nu) = \frac{{}^*|{}^*A \cap [1, \nu]|}{\nu} .$$

Questo è immediato usando il Transfer e ricordando che ${}^*(f \circ g) = {}^*f \circ {}^*g$. $\square$

Osservazione. Analogamente si dimostra che

$$\underline{d}(A) = \min\left\{ \mathrm{st}\left(\frac{{}^{*}\left|{}^{*}A \cap [1,\nu]\right|}{\nu} \right) : \nu \in {}^{*}\mathbb{N} \backslash \mathbb{N} \right\}.$$

Esercizio 7.5. Sia X un insieme. Data $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$, indichiamo con $\mathcal{F}^*$ la famiglia dei sottoinsiemi di X che intersecano ogni elemento di $\mathcal{F}$. Dimostrare che se $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ è non vuota, chiusa per soprainsiemi e PR, allora $\mathcal{F}^*$ è un filtro su X. Dedurre che la famiglia $\Delta^* \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ è un filtro su $\mathbb{N}$.

Dimostrazione. Usiamo le seguenti osservazioni generali:

1. Se $\mathcal{F} \neq \emptyset$ allora ovviamente $\emptyset \notin \mathcal{F}^*$.
2. Se $\mathcal{F}$ è chiusa per soprainsiemi allora $\mathcal{F}^*$ è chiusa per soprainsiemi. Infatti, se $A \subseteq B$ e $A \in \mathcal{F}^*$, allora dato che A interseca ogni elemento di $\mathcal{F}$ allora anche B interseca ogni elemento di $\mathcal{F}$.
3. Se $\mathcal{F}$ è chiusa per soprainsiemi, allora $\mathcal{F}^* = \{S \subseteq X : S^c \notin \mathcal{F}\}$. Infatti, se $S \in \mathcal{F}^*$, allora S interseca ogni elemento di $\mathcal{F}$, e quindi $S^c \notin \mathcal{F}$; viceversa, se $S \notin \mathcal{F}^*$, allora esiste $F \in \mathcal{F}$ tale che $S \cap F = \emptyset$, e quindi $F \subseteq S^c$, da cui che, essendo $\mathcal{F}$ chiusa per soprainsiemi, si ha $S^c \in \mathcal{F}$.

Ora, sia $\mathcal{F}$ non vuota, chiusa per soprainsiemi e PR. Allora $\mathcal{F}^*$ è non vuota e chiusa per soprainsiemi per i punti $1, 2$. Dimostriamo che $\mathcal{F}^*$ è chiusa per intersezione. Siano $A, B \in \mathcal{F}^*$, e supponiamo per assurdo che $A \cap B \notin \mathcal{F}^*$. Allora $(A \cap B)^c \in \mathcal{F}$, ossia $A^c \cup B^c \in \mathcal{F}$, e quindi essendo $\mathcal{F}$ PR abbiamo $A^c \in \mathcal{F} \vee B^c \in \mathcal{F}$. Ma $A \in \mathcal{F}^*$ e $B \in \mathcal{F}^*$, e quindi $A^c \notin \mathcal{F} \wedge B^c \notin \mathcal{F}$, assurdo.
Ovviamente la famiglia $\Delta \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ è non vuota e chiusa per soprainsiemi. Abbiamo visto in un esercizio precedente che Δ è anche PR. Allora, per quanto appena dimostrato, Δ^* è un filtro su $\mathbb{N}$. $\square$

Esercizio 7.6. Sia $A \subseteq \mathbb{Z}$. Dimostrare che $BD(A) = 1$ se e solo se A è spesso.

Dimostrazione. Definiamo la $\mathbb{N}$-successione

$$a_n = \max_{z \in \mathbb{Z}} \frac{|A \cap [z+1, z+n]|}{n}.$$

Allora per definizione si ha

$$BD(A) = \lim_{n \to \infty} a_n.$$

Se A è spesso, allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un intervallo $I = [x+1, x+n]$ con $x \in \mathbb{Z}$ tale che $I \subseteq A$, e quindi per ogni n si ha $a_n = 1$, da cui che $BD(A) = 1$. Viceversa, sia $BD(A) = 1$, e supponiamo per assurdo che A non sia spesso. Allora esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che A non contenga alcun intervallo lungo k. Questo implica che per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $z \in \mathbb{Z}$, si ha

$$|A \cap [z+1, x+nk]| \leq n(k-1),$$

in quanto $[z+1, z+nk]$ è l'unione disgiunta di n intervalli consecutivi lunghi k, nessuno dei quali è contenuto in A. Allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$a_{nk} \leq \frac{n(k-1)}{nk} = \frac{k-1}{k}.$$

Questo significa che a_{nk} non può convergere a 1 per $n \to \infty$, e questo è assurdo in quanto $(a_{nk})_{n \in \mathbb{N}}$ è una sottosuccessione di una successione di reali convergente a 1. $\square$

Esercizio 7.7. Trovare un insieme $A \subseteq \mathbb{N}$ spesso tale che $\overline{d}(A) = 0$.

Dimostrazione. Definiamo

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [2^n + 1, 2^n + n] .$$

Ovviamente A è spesso. Verifichiamo che la successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con

$$a_n = \frac{|A \cap [1, n]|}{n}$$

converge a 0, e quindi $\overline{d}(A) = 0$. Dato che per ogni $k < n$ si ha $\frac{k}{n} < \frac{k+1}{n+1}$ e $\frac{k}{n} > \frac{k}{n+1}$, la successione è strettamente crescente negli intervalli $[2^n + 1, 2^n + n]$, mentre è strettamente decrescente negli intervalli $\left[2^n + n + 1, 2^{n+1}\right]$. Dunque i "massimi relativi" della successione sono assunti negli indici $2^n + n$. Dato che la successione è ≥ 0, ci basta quindi far vedere che la sottosuccessione $b_n = a_{2^n + n}$ converge a 0. Se chiamiamo $c_n = |A \cap [1, 2^n + n]|$, allora $b_n = \frac{c_n}{2^n + n}$. Ora, è evidente che $c_{n+1} = c_n + n + 1$; dato che $c_1 = 1$, si ottiene che $c_n = 1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, e quindi

$$b_n = \frac{n(n+1)}{2(2^n + n)}$$

che ovviamente converge a 0. Ne consegue la tesi. □

8 Esercizi 24-3-2015

Esercizio 8.1. Siano $A, B \subseteq \mathbb{N}$ disgiunti. Allora

$$\underline{d}(A) + \underline{d}(B) \leq \underline{d}(A \cup B) \leq \underline{d}(A) + \overline{d}(B) \leq \overline{d}(A \cup B) \leq \overline{d}(A) + \overline{d}(B) .$$

Dimostrazione. Chiamiamo $a_\nu = \frac{{}^*|{}^*A \cap [1,\nu]|}{\nu}$, $b_\nu = \frac{{}^*|{}^*B \cap [1,\nu]|}{\nu}$ e $c_\nu = \frac{{}^*|{}^*(A \cup B) \cap [1,\nu]|}{\nu}$. Grazie al Transfer, si ha ${}^*(A \cup B) = {}^*A \cup {}^*B$ e ${}^*A \cap {}^*B = \emptyset$. Inoltre, sempre con il Transfer, si verifica che per ogni $\nu \in {}^*\mathbb{N} \backslash \mathbb{N}$ si ha ${}^*|{}^*(A \cup B) \cap [1, \nu]| = {}^*|{}^*A \cap [1, \nu]| + {}^*|{}^*B \cap [1, \nu]|$. Ne consegue che per ogni $\nu \in {}^*\mathbb{N} \backslash \mathbb{N}$ si ha $c_\nu = a_\nu + b_\nu$. Ora, abbiamo già dimostrato in un esercizio precedente che

$$\overline{d}(A) = \max_{\nu \in {}^*\mathbb{N} \backslash \mathbb{N}} \operatorname{st}(a_\nu) :$$

in modo esattamente analogo si dimostra che

$$\underline{d}(A) = \min_{\nu \in {}^*\mathbb{N} \backslash \mathbb{N}} \operatorname{st}(a_\nu) .$$

Ricordiamo che $\operatorname{st}(\alpha) + \operatorname{st}(\beta) = \operatorname{st}(\alpha + \beta)$. La tesi discende allora dalla seguente catena di disuguaglianze ovvie:

$$\begin{aligned} \min_{\nu \in {}^*\mathbb{N} \backslash \mathbb{N}} \operatorname{st}(a_\nu) + \min_{\nu \in {}^*\mathbb{N} \backslash \mathbb{N}} \operatorname{st}(b_\nu) &\leq \min_{\nu \in {}^*\mathbb{N} \backslash \mathbb{N}} \operatorname{st}(a_\nu) + \operatorname{st}(b_\nu) \\ &\leq \min_{\nu \in {}^*\mathbb{N} \backslash \mathbb{N}} \operatorname{st}(a_\nu) + \max_{\nu \in {}^*\mathbb{N} \backslash \mathbb{N}} \operatorname{st}(b_\nu) \\ &\leq \max_{\nu \in {}^*\mathbb{N} \backslash \mathbb{N}} \operatorname{st}(a_\nu) + \operatorname{st}(b_\nu) \\ &\leq \max_{\nu \in {}^*\mathbb{N} \backslash \mathbb{N}} \operatorname{st}(a_\nu) + \max_{\nu \in {}^*\mathbb{N} \backslash \mathbb{N}} \operatorname{st}(b_\nu) . \end{aligned}$$

□

Esercizio 8.2. Se $A = \{a_1 < a_2 < \cdots\} \subseteq \mathbb{N}$ e la serie $\sum_n \frac{1}{a_n}$ converge, allora $d(A) = 0$.

Dimostrazione. Dimostriamo che

$$d(A) = 0 \iff \lim_{n\to\infty} \frac{n}{a_n} = 0.$$

Definiamo $b_k = \frac{|A\cap[1,k]|}{k}$ per $k \in \mathbb{N}$: allora si ha $d(A) = 0 \iff b_k \to 0$: la successione $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è non negativa, e assume i suoi "punti di massimo relativo" quando $k = a_n$ per qualche $n \in \mathbb{N}$ (precisamente per gli n tali che $a_n + 1 \notin A$). Dunque, $b_k \to 0$ per $k \to \infty$ se e solo se $b_{a_n} \to 0$ per $n \to \infty$; ma $b_{a_n} = \frac{|A\cap[1,a_n]|}{a_n} = \frac{n}{a_n}$, e quindi $d(A) = 0 \iff \frac{n}{a_n} \to 0$ per $n \to \infty$, come volevasi dimostrare. Per concludere, utilizziamo il seguente

Lemma. *Sia $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione decrescente di reali positivi tale che la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ sia convergente. Allora*

$$\lim_{n\to\infty} nb_n = 0.$$

Dimostrazione. Per il criterio di condensazione di Cauchy, la serie $\sum_{n\in\omega} 2^n b_{2^n}$ è convergente, e quindi

$$\lim_{n\to\infty} 2^n b_{2^n} = 0.$$

Ora, per ogni $n \in \mathbb{N}$ definiamo $k_n \in \omega$ come il minimo elemento di ω tale che valga la disuguaglianza $n < 2^{k_n}$. Allora, dato che la successione $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente, si ha

$$nb_n < 2^{k_n} b_{2^{k_n}}.$$

Ovviamente, per $n \to \infty$ si ha $k_n \to \infty$, e per $k_n \to \infty$ il termine a destra della disuguaglianza precedente converge a 0. Allora, per confronto, anche $nb_n \to 0$. □

Ora, dato che la successione $\left(\frac{1}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione decrescente e $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{a_n}$ converge, si ha che $\frac{n}{a_n} \to 0$ per $n \to \infty$, come volevasi dimostrare.

□

Esercizio 8.3. (Underspill) Siano $A \subseteq {}^*\mathbb{N}$ e $B \subseteq {}^*\mathbb{N}$ interni. Dimostrare che:

1. Se A contiene ipernaturali infiniti arbitrariamente piccoli, allora A interseca $\mathbb{N}$.

2. Se $\forall \xi \in {}^*\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$ si ha $[\xi, +\infty] \subseteq A$, allora esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $[n, +\infty] \subseteq A$.

3. Se $[-\epsilon, \epsilon] \subseteq B$ per ogni $\epsilon \sim 0$, allora esiste $0 < r \in \mathbb{R}$ tale che $[-r, r] \subseteq B$.

Dimostrazione. Ricordiamo che i sottoinsiemi interni di ${}^*\mathbb{N}$ sono gli elementi di ${}^*\mathcal{P}(\mathbb{N})$, e i sottoinsiemi interni di ${}^*\mathbb{R}$ sono gli elementi di ${}^*\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

1. Innanzitutto, essendo $A \subseteq {}^*\mathbb{N}$ interno, A ammette minimo, in quanto ogni sottoinsieme di $\mathbb{N}$ ha minimo. Volendo essere rigorosi, nel modello standard vale $(\forall X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}))\,(\exists x \in X)\,(\forall y \in X)\,(x \leq y)$, e quindi per Transfer nel modello nonstandard vale $(\forall X \in {}^*\mathcal{P}(\mathbb{N}))\,(\exists x \in X)\,(\forall y \in X)\,(x \leq y)$. Ora, sia ξ il minimo di A: allora ξ non può stare in ${}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$, in quanto allora $\xi - 1$ sarebbe un ipernaturale infinito strettamente minore di tutti gli elementi di A. Ne consegue che $\xi \in \mathbb{N}$, e quindi A interseca ξ.

2. Sia C l'insieme degli $a \in A$ tali che $[a, +\infty] \subseteq A$. Allora C è interno. Infatti,
$$C = \{a \in A : (\forall x \in {}^*\mathbb{N})\,(x \geq a \to x \in A)\}\,,$$
dunque C è il sottoinsieme di un interno definito (relativamente a tale interno) da una formula con quantificatori limitati e parametri interni, e quindi è interno. Allora, come abbiamo visto nel punto 1, C ha minimo in $\mathbb{N}$. Sia n tale minimo: allora, per definizione di C, abbiamo che $[n, +\infty] \subseteq A$.

3. Sia C l'insieme dei $b \in B$ tali che $b > 0$ e $[-b, b] \subseteq B$. Allora C è interno. Infatti,
$$C = \{b \in B : (b > 0) \wedge (\forall x \in {}^*\mathbb{R})\,(-b \leq x \leq b \to x \in B)\}$$
e quindi si ragiona come nel punto precedente. Ora, se C è superiormente illimitato, la tesi è ovvia, quindi supponiamo che C sia superiormente limitato. Essendo $C \subseteq {}^*\mathbb{R}$ interno, C ammette sup in ${}^*\mathbb{R}$, in quanto ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$ superiormente limitato ha sup in $\mathbb{R}$. Volendo essere rigorosi, nel modello standard vale
$$(\forall X \in \mathcal{P}(\mathbb{R}))\,[X \text{ limitato superiormente in } \mathbb{R} \to (\exists \sup \in \mathbb{R})\,(\sup \text{ è il minimo dei maggioranti di } X \text{in } \mathbb{R})]$$
(dove "X limitato superiormente" e "sup è il minimo dei maggioranti di X" sono esprimibili con ovvie formule con quantificatori limitati e unico parametro $\mathbb{R}$), e quindi per Transfer nel modello nonstandard vale la stessa formula con ${}^*\mathcal{P}(\mathbb{R})$ a sostituire $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ e ${}^*\mathbb{R}$ a sostituire $\mathbb{R}$. Ora, sia $\gamma = \sup(C)$. Osserviamo che non può essere $\gamma \sim 0$: infatti, se $\gamma \sim 0$, allora $2\gamma \sim 0$, e quindi $[-2\gamma, 2\gamma] \subseteq B$ da cui che, essendo $\gamma = \sup(C)$, si ha $\gamma \geq 2\gamma$ da cui $1 \geq 2$, assurdo. Allora certamente esiste $r \in \mathbb{R}$ tale che $0 < r < \gamma$, e quindi esiste $\alpha \in {}^*\mathbb{R}$ tale che $r < \alpha < \gamma$ da cui $[-\alpha, \alpha] \subseteq B$, e quindi $[-r, r] \subseteq B$.

□

Esercizio 8.4. La lunghezza di un intervallo $[\alpha, \beta] \subseteq {}^*\mathbb{N}$ è l'ipernaturale $\beta - \alpha + 1$. Sia $A \subseteq \mathbb{N}$. Sono equivalenti:

1. A è spesso.
2. Per ogni $\nu \in {}^*\mathbb{N}$ esiste un intervallo di lunghezza ν con $I \subseteq {}^*A$.
3. ${}^*A$ contiene un intervallo di ipernaturali di lunghezza infinita.
4. Esiste $\xi \in {}^*\mathbb{N}$ tale che $\xi + n \in {}^*A$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione.

1. $(1 \Rightarrow 2)$ Dato che A è spesso, A contiene intervalli arbitrariamente lunghi. Allora nel modello standard vale l'enunciato

$$(\forall n \in \mathbb{N})\,(\exists a \in A)\,(\forall x \in \mathbb{N})\,(a \leq x \leq a + n \to x \in A)\,,$$

e quindi per Transfer nel modello nonstandard vale l'enunciato

$$(\forall \nu \in {}^*\mathbb{N})\,(\exists a \in {}^*A)\,(\forall x \in {}^*\mathbb{N})\,(a \leq x \leq a + \nu \to x \in {}^*A)\,.$$

Ne consegue la tesi.

2. $(2 \Rightarrow 3)$ Ovvio.

3. $(3 \Rightarrow 4)$ Se $[\alpha, \beta] \subseteq {}^*A$ ha lunghezza infinita, allora $\beta - \alpha \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$, e quindi per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $\alpha + n < \beta$. Ne consegue che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $\alpha + n \in [\alpha, \beta] \subseteq {}^*A$ e quindi la tesi.

4. $(4 \Rightarrow 1)$ Sia

$$C = \{\nu \in {}^*\mathbb{N} : \xi + \nu \in {}^*A\}\,:$$

allora C è un sottoinsieme interno di ${}^*\mathbb{N}$ contenente $\mathbb{N}$, e quindi per overspill deve contenere un intervallo infinito $[1, \nu]$. Ne consegue che ${}^*A$ contiene l'intervallo infinito $[\xi + 1, \xi + \nu]$.

□

Esercizio 8.5. Sia $B \subseteq \mathbb{N}$. Sono equivalenti:

1. B è sindetico.

2. Esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che ${}^*B$ ha solo buchi di ampiezza $\leq k$.

3. ${}^*B$ non ha buchi infiniti, ossia interseca ogni intervallo infinito.

4. Per ogni $\xi \in {}^*\mathbb{N}$ si ha $B_\xi = \{n \in \mathbb{N} : \xi + n \in {}^*B\} \neq \emptyset$.

Dimostrazione. Osserviamo che se $B^c = \mathbb{N}\backslash B$, allora ${}^*(B^c) = ({}^*B)^c = {}^*\mathbb{N}\backslash{}^*B$: infatti, nel modello standard vale $(\forall x \in \mathbb{N})\,(x \in B^c \leftrightarrow x \notin B)$ e quindi nel modello nonstandard vale $(\forall x \in {}^*\mathbb{N})\,(x \in {}^*(B^c) \leftrightarrow x \notin {}^*B)$.

1. $(1 \Rightarrow 2)$ Sia B sindetico. Allora esiste $k \in \mathbb{N}$ che limita la lunghezza di un qualunque buco di B, ossia nel modello standard vale

$$(\forall a \in \mathbb{N})\,(\forall b \in \mathbb{N})\,([a, b] \subseteq B^c \to b - a + 1 \leq k)$$

(dove la formula $[a, b] \subseteq B^c$ è un modo veloce per scrivere $(\forall x \in \mathbb{N})\,(a \leq x \wedge x \leq b \to x \in B^c)$).
Allora, per Transfer, nel modello nonstandard vale

$$(\forall \alpha \in {}^*\mathbb{N})\,(\forall \beta \in {}^*\mathbb{N})\,([\alpha, \beta] \subseteq {}^*B^c \to \beta - \alpha + 1 \leq k)$$

e questo prova che ${}^*B$ ha solo buchi di ampiezza $\leq k$.

2. $(2 \Rightarrow 3)$ Ovvia.

3. $(3 \Rightarrow 4)$ Supponiamo per assurdo che $B_\xi = \emptyset$ per un certo $\xi \in {}^*\mathbb{N}$. Sia

$$C = \{\nu \in {}^*\mathbb{N} : \xi + \nu \in {}^*B^c\} :$$

allora C è interno e contiene $\mathbb{N}$, dunque per overspill deve contenere un intervallo $[1, \nu]$ con $\nu \in {}^*\mathbb{N} \backslash \mathbb{N}$: questo è assurdo, perchè allora ${}^*B^c$ conterrebbe l'intervallo infinito $[\xi + 1, \xi + \nu]$ e quindi ${}^*B$ avrebbe un buco infinito.

4. $(4 \Rightarrow 1)$ Sia vero che per ogni $\xi \in {}^*\mathbb{N}$ si ha $B_\xi \neq \emptyset$, e supponiamo per assurdo che B non sia sindetico. Allora B^c è spesso, e quindi per il punto 4 dell'esercizio precedente esiste $\xi \in {}^*\mathbb{N}$ tale che $(B^c)_\xi = \{n \in \mathbb{N} : \xi + n \in {}^*(B^c)\} = \mathbb{N}$. Ora osserviamo che $(B^c)_\xi = (B_\xi)^c$: infatti, $n \in (B^c)_\xi$ se e solo se $\xi + n \in {}^*(B^c) = ({}^*B)^c$ se e solo se $\xi + n \notin {}^*B$ se e solo se $n \notin B_\xi$. Allora, dato che $B^c_\xi = \mathbb{N}$, deve essere $B_\xi = \emptyset$, assurdo.

$\square$

Esercizio 8.6. Sia I un insieme infinito. Allora βI non è metrizzabile.

Dimostrazione. Osserviamo che in ogni spazio metrico (X, d), per ogni punto $x \in X$ esiste una base locale in x numerabile tale che la sua intersezione coincida con $\{x\}$: basta prendere gli insiemi $B_{\frac{1}{n}}(x) = \left\{y \in X : d(y, x) < \frac{1}{n}\right\}$.
Supponiamo ora per assurdo che βI sia uno spazio metrico. Sia $\mathcal{U}$ un ultrafiltro non principale su I: allora esiste una base locale in $\mathcal{U}$ numerabile $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = \{\mathcal{U}\}$. Dato che gli $\{\mathcal{O}_A : A \subseteq I\}$ sono una base della topologia su βI, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $\mathcal{O}_{A_n}$ tale che $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_{A_n} \subseteq B_n$: allora anche $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_{A_n} = \{\mathcal{U}\}$, ossia $\mathcal{U}$ è l'unico ultrafiltro su I che contiene ogni A_n. Questo implica che la famiglia $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ genera $\mathcal{U}$: infatti, la famiglia $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ha la FIP perchè è una sottofamiglia di $\mathcal{U}$, e quindi il filtro da essa generata deve essere proprio $\mathcal{U}$ (altrimenti potremmo estenderla a due ultrafiltri distinti). Questo è assurdo: infatti, vale il seguente

Lemma. *Sia $\mathcal{U}$ un ultrafiltro nonprincipale su un insieme infinito I. Allora $\mathcal{U}$ non può essere generato da una famiglia numerabile di sottoinsiemi di I.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $\mathcal{U}$ sia generato dalla famiglia $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $A_n \subseteq I$. Allora:

1. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'insieme $A_1 \cap \cdots \cap A_n$ è infinito, in quanto sta in $\mathcal{U}$ che è non principale.

2. Per ogni $B \subseteq I$, la famiglia $\{B\} \cup \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ha la FIP se e solo se $B \in \mathcal{U}$. Infatti, la direzione $\Leftarrow$ è ovvia, mentre se $\{B\} \cup \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ha la FIP allora si estende ad un filtro $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{U}$, da cui che essendo $\mathcal{U}$ massimale abbiamo $\mathcal{F} = \mathcal{U}$ e quindi $B \in \mathcal{U}$.

Definiamo ora induttivamente due insiemi $X = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $Y = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nel seguente modo: scegliamo $x_1 \in A_1$ e $y_1 \in A_1 \backslash \{x_1\}$ arbitrariamente; continuiamo scegliendo $x_2 \in A_1 \cap A_2$ e $y_2 \in A_1 \cap A_2 \backslash \{x_1\}$; al passo n-esimo, scegliamo $x_n \in A_1 \cap \cdots \cap A_n$ e $y_n \in A_1 \cap \cdots \cap A_n \backslash \{x_1, ..., x_n\}$. Osserviamo che le scelte degli y_n sono possibili in quanto per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'insieme $A_1 \cap \cdots \cap A_n$ è infinito. Ora, per costruzione, X e Y sono disgiunti: inoltre, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$\begin{aligned} x_n &\in A_1 \cap \cdots \cap A_n \cap X \\ y_n &\in A_1 \cap \cdots \cap A_n \cap Y \end{aligned}$$

e quindi le famiglie $\{X\} \cup \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{Y\} \cup \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ hanno la FIP. Ma allora $X \in \mathcal{U}$ e $Y \in \mathcal{U}$, assurdo in quanto X e Y sono disgiunti.

$\square$

$\square$

9 Esercizi 27-3-2015

Esercizio 9.1. Un $A \subseteq \mathbb{Z}$ è sindetico se e solo se esiste $F \subseteq \mathbb{Z}$ finito tale che $A + F = \mathbb{Z}$.

Dimostrazione. Se A è sindetico, allora esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che ogni buco di A sia di ampiezza al più n. Allora, se prendiamo $F = \{1, ..., n\}$, si ha $A + F = \mathbb{Z}$: infatti, se $x \notin A$ allora esiste $x_0 \in A$ tale che $0 \leq x - x_0 = k \leq n$, e quindi $x_0 + k = x \in A + F$, da cui per la generalità di x si ha la tesi. Viceversa, sia A non sindetico, e sia F insieme finito. Definiamo

$$\begin{aligned} f_{\min} &= \min\left((F \cap (-\infty, 0)) \cup \{0\}\right) \\ f_{\max} &= \max\left((F \cap (0, +\infty)) \cup \{0\}\right) : \end{aligned}$$

allora, dato che A non è sindetico, esisterà un $x \notin A$ tale che, detto $x_0 = \max\{a \in A : a < x\}$ e detto $x_1 = \min\{a \in A : a > x\}$, si abbia $x_0 + f_{\max} < x < x_1 + f_{\min}$. Questo implica che $x \notin A + F$. $\square$

Esercizio 9.2. Un $A \subseteq \mathbb{Z}$ è spesso se e solo se per ogni $F \subseteq \mathbb{Z}$ finito esiste $x \in \mathbb{Z}$ tale che $x + F \subseteq A$.

Dimostrazione. Ovviamente la tesi $(\forall F \subseteq \mathbb{Z}$ finito$)\ (\exists x \in \mathbb{Z})\ (x + F \subseteq A)$ equivale all'enunciato $(\forall F \subseteq \mathbb{Z}$ finito$)\ (\exists x \in \mathbb{Z})$ (
Usando l'esercizio precedente, abbiamo che: A è spesso $\iff$ A^c *non* è sindetico $\iff$ $\forall F \subseteq \mathbb{Z}$ finito si ha $A^c + F \nsubseteq \mathbb{Z}$ $\iff$ $\forall F \subseteq \mathbb{Z}$ finito esiste $x \in \mathbb{Z}$ tale che $x \notin A^c + F$ $\iff$ $\forall F \subseteq \mathbb{Z}$ finito esiste $x \in \mathbb{Z}$ tale che per ogni $f \in F$ si ha $x - f \notin A^c$ $\iff$ $\forall F \subseteq \mathbb{Z}$ finito esiste $x \in \mathbb{Z}$ tale che $x - F \subseteq A$. $\square$

Esercizio 9.3. Dimostrare che le famiglie dei sindetici di $\mathbb{Z}$ e degli spessi di $\mathbb{Z}$ non sono regolari per partizioni.

Dimostrazione. Non sono neanche debolmente regolari per partizioni su $\mathbb{Z}$. Infatti:

1. $\mathbb{Z}$ è sindetico, ma l'insieme $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\left[n^2, n^2 + n\right] \cup \left[-n^2, -\left(n^2 + n\right)\right]\right)$ è spesso con complementare spesso, e quindi sia A che A^c non sono sindetici.

2. $\mathbb{Z}$ è spesso, ma sia $PARI$ che $DISPARI$ non sono spessi.

$\square$

Esercizio 9.4. Dimostrare che $A \subseteq \mathbb{N}$ è sindetico a tratti se e solo se esiste un I intervallo infinito di ipernaturali tale che i buchi di ${}^*A \cap I$ siano di ampiezza finita.

Dimostrazione. Dato che A è sindetico a tratti, si ha $A = T \cap S$, dove T è spesso e S è sindetico. Ricordando le caratterizzazioni nonstandard degli spessi e dei sindetici, abbiamo che ${}^*T$ contiene un I intervallo infinito di ipernaturali, e che esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che ogni buco di ${}^*S$ abbia ampiezza $\leq k$. Ora, abbiamo ${}^*A \cap I = {}^*(S \cap T) \cap I = {}^*S \cap {}^*T \cap I = {}^*S \cap I$, e quindi ogni buco di ${}^*A \cap I$ ha ampiezza $\leq k$, da cui la tesi. $\square$

10 Esercizi 30-3-2015

Esercizio 10.1. Sia I un insieme infinito. Dimostrare che l'ordine $\leq$ su $\frac{\beta I}{\simeq}$ non ha elementi massimali.

Dimostrazione. Dimostriamo prima due lemmi:

Lemma. *Siano I, J insiemi non vuoti, e siano $\pi_1 : I \times J \to I$ e $\pi_2 : I \times J \to J$ le proiezioni canoniche. Se $\mathcal{U} \in \beta I$ e $\mathcal{V} \in \beta J$, allora $(\pi_1)_* (\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}) = \mathcal{U}$ e $(\pi_2) (\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}) = \mathcal{V}$.*

Dimostrazione. Dimostriamo che $(\pi_1)_* (\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}) = \mathcal{U}$: infatti, se $A \in \mathcal{U}$ allora $\pi_1^{-1}(A) = A \times J$ sta in $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$, in quanto $\{i \in I : (A \times J)_i \in \mathcal{V}\} = A \in \mathcal{U}$, in quanto

$$(A \times J)_i = \{j \in J : (i, j) \in A \times J\} = \begin{cases} I & i \in A \\ \emptyset & i \notin A \end{cases}.$$

Ne consegue che $\mathcal{U} \subseteq (\pi_1)_* (\mathcal{U} \otimes \mathcal{V})$, e quindi dato che entrambi sono ultrafiltri su I si ha l'uguaglianza.
Dimostriamo che $(\pi_2)_* (\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}) = \mathcal{V}$: infatti, se $A \in \mathcal{V}$ allora $\pi_2^{-1}(A) = I \times A$ sta in $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$, in quanto $\{i \in I : (I \times A)_i \in \mathcal{V}\} = I \in \mathcal{U}$, in quanto

$$(I \times A)_i = \{j \in J : (i, j) \in I \times A\} = A.$$

Ne consegue che $\mathcal{V} \subseteq (\pi_2)_* (\mathcal{U} \otimes \mathcal{V})$, e quindi dato che entrambi sono ultrafiltri su J si ha l'uguaglianza. □

Lemma. *Se $\mathcal{U}$ è un ultrafiltro nonprincipale su I, allora $\mathcal{U} < \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$.*

Dimostrazione. Mostriamo che $\mathcal{U} \leq \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$. Dal lemma precedente, abbiamo $(\pi_1)_* (\mathcal{U} \otimes \mathcal{U}) = \mathcal{U}$, e quindi $\mathcal{U} \leq \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$. Mostriamo ora che $\mathcal{U} \otimes \mathcal{U} \not\leq \mathcal{U}$. Supponiamo per assurdo che esista $f = (f_1, f_2) : I \to I \times I$ tale che $f_* (\mathcal{U}) = \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$. Allora $(\pi_1 \circ f)_* (\mathcal{U}) = (f_1)_* (\mathcal{U}) = \mathcal{U}$ e quindi $f_1 \equiv_{\mathcal{U}} \mathrm{id}_I$; analogamente, $(\pi_2 \circ f)_* (\mathcal{U}) = (f_2)_* (\mathcal{U}) = \mathcal{U}$, e quindi $f_2 \equiv_{\mathcal{U}} \mathrm{id}_I$. Ne consegue che $f \equiv_{\mathcal{U}} \delta$, dove $\delta : I \to I \times I$ manda i in (i, i), e quindi $f_* (\mathcal{U}) = \delta_* (\mathcal{U})$. Ci resta da dimostrare che se $\mathcal{U}$ è nonprincipale allora $\delta_* (\mathcal{U}) \neq \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$. Se $A \in \mathcal{U}$, allora $\delta (A) \in \delta_* (\mathcal{U})$: ma $\delta (A) \notin \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$, in quanto $(\delta (A))_i = \{j \in I : (i, j) \in \delta (A)\} = \{i\}$ e quindi se $\mathcal{U}$ è nonprincipale $\{i \in I : (\delta (A))_i \in \mathcal{U}\} = \emptyset \notin \mathcal{U}$. □

Ora risolviamo l'esercizio. Sia $\mathcal{U} \in \beta I$: allora $\mathcal{U} < \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$. Dato che I è infinito, esiste una bigezione $f : I \times I \to I$: definiamo

$$\mathcal{V} = \{f (A) : A \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}\}.$$

Osserviamo che $f_* (\mathcal{U} \otimes \mathcal{U}) = \mathcal{V}$: infatti, se $B \in \mathcal{V}$ allora $B = f (A)$ per un certo $A \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$, e quindi $f^{-1} (B) = f^{-1} (f (A)) = A \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$ da cui che $B \in f_* (\mathcal{U} \otimes \mathcal{U})$, mentre se $B \in f_* (\mathcal{U} \otimes \mathcal{U})$ allora $f^{-1} (B) \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$, e quindi $B = f \left(f^{-1} (B)\right) \in \mathcal{V}$. Ne consegue che $\mathcal{U} \otimes \mathcal{U} \simeq \mathcal{V}$, e quindi $[\mathcal{U}] < [\mathcal{V}]$.

□

Esercizio 10.2. Sia $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N} \backslash \mathbb{N}$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti.

1. $\mathcal{U}$ è $\leq$-minimale in $\beta\mathbb{N} \backslash \mathbb{N}$, ossia per ogni $\mathcal{V} \in \beta\mathbb{N} \backslash \mathbb{N}$ si ha $\mathcal{V} \leq \mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{V} \simeq \mathcal{U}$.

2. $\mathcal{U}$ è selettivo, ossia se $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una partizione propria (ossia ogni pezzo è non vuoto) di $\mathbb{N}$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si abbia $A_n \notin \mathcal{U}$, esiste $X \in \mathcal{U}$ tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$ si abbia $|X \cap A_n| = 1$.

3. Per ogni $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ esiste $A \in \mathcal{U}$ tale che $f_{|A}$ è costante oppure iniettiva.

4. Ogni $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è $\mathcal{U}$-equivalente ad una $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ costante oppure biunivoca.

5. Se ${}^*\mathbb{R} = \frac{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}{\mathcal{U}}$ e $\xi \in {}^*\mathbb{R}$ è infinitesimo, allora esiste $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ infinitesima, e costante o strettamente monotona, tale che $[f] = \xi$.

6. Ogni $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è $\mathcal{U}$-equivalente ad una $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ non decrescente.

7. $\mathcal{U}$ è di Ramsey, ossia per ogni r-colorazione di $[\mathbb{N}]^2$ esiste $H \in \mathcal{U}$ tale che $[H]^2$ sia monocromatico.

Dimostrazione. Dimostro $7 \Rightarrow (5 \iff 6) \Rightarrow (1 \iff 2 \iff 3 \iff 4)$. La dimostrazione conclusiva $2 \Rightarrow 7$ è parziale.

1. $(4 \Rightarrow 3)$ Supponiamo che non esista $A \in \mathcal{U}$ tale che $f_{|A}$ sia costante. Allora f non è $\mathcal{U}$-equivalente ad una funzione costante, e quindi per la 4 è $\mathcal{U}$-equivalente ad una $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ biunivoca. Allora $A = \{n \in \mathbb{N} : f(n) = g(n)\} \in \mathcal{U}$ e $f_{|A} = g_{|A}$, da cui che $f_{|A}$ è iniettiva.

2. $(3 \Rightarrow 4)$ Supponiamo che esista $A \in \mathcal{U}$ tale che $f_{|A}$ sia iniettiva. Dato che $\mathcal{U}$ è nonprincipale, A è infinito e quindi esistono $A_1 \sqcup A_2 = A$ infiniti. Osserviamo che $f_{|A_1}$ e $f_{|A_2}$ sono iniettive, e quindi $|f(A_1)| = |f(A_2)| = \aleph_0$. Ora, WLOG $A_1 \in \mathcal{U}$. Osserviamo che $|\mathbb{N} \backslash A_1| = |\mathbb{N} \backslash f(A_1)| = \aleph_0$ in quanto $A_2 \subseteq \mathbb{N} \backslash A_1$ e $f(A_2) \subseteq \mathbb{N} \backslash f(A_1)$. Allora esiste una bigezione $\mathbb{N} \backslash A_1 \to \mathbb{N} \backslash f(A_1)$, che incollata a $f_{|A_1}$ fornisce una bigezione $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ che è $\mathcal{U}$-equivalente ad f.

3. $(2 \Rightarrow 3)$ Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e sia $B_n = f^{-1}(n)$. Allora $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una partizione di $\mathbb{N}$. Se $B_n \in \mathcal{U}$ per qualche $n \in \mathbb{N}$, allora dato che $f_{|B_n}$ è costantemente uguale a n abbiamo finito. Supponiamo quindi che $B_n \notin \mathcal{U}$ per ogni n. Allora, dato che $\mathcal{U}$ è un ultrafiltro, esistono infiniti $n \in \mathbb{N}$ tali che $B_n \neq \emptyset$, e quindi per la 2 esiste $X \in \mathcal{U}$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si abbia $|X \cap B_n| \leq 1$. Allora $f_{|X}$ è chiaramente iniettiva.

4. $(3 \Rightarrow 2)$ Sia $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una partizione propria di $\mathbb{N}$ tale che $\forall n \in \mathbb{N}$ si abbia $A_n \notin \mathcal{U}$. Definiamo $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $f(x) = n \iff x \in A_n$. Per ipotesi, esiste $Y \in \mathcal{U}$ tale che $f_{|Y}$ sia costante oppure iniettiva. Ma $f_{|Y}$ non può essere costante, perchè se lo fosse allora dovrebbe essere $Y \subseteq A_n$ per qualche $n \in \mathbb{N}$, e quindi $A_n \in \mathcal{U}$, assurdo: ne consegue che $f_{|Y}$ è iniettiva, e quindi per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $|Y \cap A_n| \leq 1$. Allora possiamo estendere Y ad un $X \in \mathcal{U}$ (perchè $Y \in \mathcal{U}$) tale che $|X \cap A_n| = 1$ per *ogni* $n \in \mathbb{N}$, aggiungendo ad Y il minimo di A_n per ogni $n \in \mathbb{N}$ tale che $Y \cap A_n = \emptyset$.

5. $(1 \Rightarrow 4)$ Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, e sia $\mathcal{V} = f_*(\mathcal{U})$. Ci sono due casi possibili:

   (a) $\mathcal{V}$ è un ultrafiltro principale, diciamo generato da $\{n\}$. Dimostriamo che f è $\mathcal{U}$-equivalente alla mappa costante in n. Dato che $f_*(\mathcal{U}) = \mathcal{V}$, si ha che per ogni $A \in \mathcal{U}$ si ha $f(A) \in \mathcal{V}$ o equivalentemente $n \in f(A)$. Sia ora $X = \{x \in \mathbb{N} : f(x) = n\}$. Allora $X \in \mathcal{U}$, in quanto $n \notin f(X^c)$ per definizione di X.

(b) $\mathcal{V}$ è un ultrafiltro nonprincipale. Allora, per la 1, si ha $\mathcal{V} \simeq \mathcal{U}$, ossia esiste $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ biunivoca tale che $g_* (\mathcal{U}) = \mathcal{V}$. Ora, $g_* (\mathcal{U}) = f_* (\mathcal{U})$ e g è iniettiva: ne consegue che $g \equiv_{\mathcal{U}} f$.

6. ($4 \Rightarrow 1$) Sia $\mathcal{V} \in \beta\mathbb{N} \backslash \mathbb{N}$ tale che $\mathcal{V} \leq \mathcal{U}$. Allora esiste $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $f_* (\mathcal{U}) = \mathcal{V}$. Per la 4, esiste $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ costante o biunivoca tale che $f \equiv_{\mathcal{U}} g$, da cui che $f_* (\mathcal{U}) = g_* (\mathcal{U}) = \mathcal{V}$. Se la g è costante su n, allora si verifica facilmente che $g_* (\mathcal{U})$ è l'ultrafiltro su $\mathbb{N}$ generato da $\{n\}$, e questo è assurdo in quanto $\mathcal{V}$ è nonprincipale. Ne consegue che g è biunivoca, e quindi $\mathcal{U} \simeq \mathcal{V}$. Dalla generalità di $\mathcal{V}$ si ha la 1.

7. ($5 \Rightarrow 6$) Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. È sufficiente dimostrare che esiste $X \in \mathcal{U}$ tale che $f_{|X}$ è costante oppure non decrescente. Supponiamo che f non sia $\mathcal{U}$-equivalente ad una costante: allora $[f] \in {}^*\mathbb{N} \backslash \mathbb{N}$. Consideriamo
$$\begin{aligned} g : \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto \frac{1}{f(n)} : \end{aligned}$$
allora $[g] = [f]^{-1}$ e quindi $[g] \in {}^*\mathbb{R}$ è infinitesimo. Per la 5, esiste $h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ monotona infinitesima tale che $[h] = [g]$, e quindi $X = \{n \in \mathbb{N} : h(n) = g(n)\} \in \mathcal{U}$. Ora, in X la h è positiva, monotona e infinitesima: ne consegue che deve essere decrescente. Questo implica che la f ristretta a X è crescente: infatti, se $x_1 < x_2 \in X$, allora $h(x_1) \geq h(x_2)$, ossia $\frac{1}{f(x_1)} \geq \frac{1}{f(x_2)}$, da cui $f(x_1) \leq f(x_2)$.

8. ($6 \Rightarrow 5$) Sia $\xi \in {}^*\mathbb{R}$ infinitesimo, diciamo $\xi = [g]$ dove $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Se $\xi = 0$, allora g deve essere $\mathcal{U}$-equivalente alla successione di tutti 0. Supponiamo quindi WLOG $\xi > 0$. Allora $g > 0$ in un insieme $\mathcal{U}$-grande. Definiamo ora
$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto \begin{cases} m & \frac{1}{m+n+1} \leq |g(n)| < \frac{1}{m+n} \\ 1 & g(n) = 0 \end{cases} . \end{aligned}$$
Per la 6, esiste $H \in \mathcal{U}$ tale che $f_{|H}$ sia nondecrescente, e per quanto detto prima possiamo supporre WLOG che in H la g sia positiva. Pertanto, ponendo $H = \{h_1 < h_2 < h_3 < \cdots\}$, abbiamo che $\forall i \in \mathbb{N}$ si ha $f(h_i) \leq f(h_{i+1})$, $h_{i+1} \geq h_i + 1$ e $\frac{1}{f(h_i)+h_i+1} \leq g(h_i) < \frac{1}{f(h_i)+h_i}$, da cui
$$\begin{aligned} g(h_{i+1}) &< \frac{1}{f(h_{i+1}) + h_{i+1}} \\ &\leq \frac{1}{f(h_{i+1}) + h_i + 1} \\ &\leq \frac{1}{f(h_i) + h_i + 1} \\ &\leq g(h_i) \end{aligned}$$
e quindi $g(h_{i+1}) < g(h_i)$: ne consegue che g è strettamente decrescente su H. La g deve anche essere infinitesima su H, perchè se per assurdo avessimo $g > \frac{1}{n}$ su H per un certo $n \in \mathbb{N}$, allora avremmo che $\left\{m \in \mathbb{N} : |g(m)| \leq \frac{1}{n}\right\} \in \mathcal{U}$ perchè ξ è infinitesimo, e inoltre $\left\{m \in \mathbb{N} : |g(m)| > \frac{1}{n}\right\} \supseteq H \in \mathcal{U}$, assurdo.

9. $(6 \Rightarrow 2)$ Sia $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una partizione propria di $\mathbb{N}$ tale che $\forall n \in \mathbb{N}$ si abbia $A_n \notin \mathcal{U}$. Definiamo $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $f(x) = n \iff x \in A_n$. Per la 6, esiste $B \in \mathcal{U}$ tale che $f_{|B}$ sia nondecrescente. Definiamo $B_n = A_n \cap B$: allora $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una partizione di B tale che $(\forall n \in \mathbb{N})\, B_n < B_{n+1}$ (ossia se $x \in B_n$ e $y \in B_{n+1}$ allora $x < y$): infatti, se per assurdo esistessero $x \in B_n, y \in B_{n+1}$ tali che $x \geq y$, essendo $f_{|B}$ non decrescente dovrebbe essere $n = f(x) \geq f(y) = n + 1$, assurdo. Osserviamo adesso che $B_n \neq \emptyset$ per infiniti n: infatti, se così non fosse, essendo $B \in \mathcal{U}$ dovremmo avere $B_n \in \mathcal{U}$ per un certo n, assurdo in quanto $B_n \subseteq A_n \notin \mathcal{U}$. Allora ogni B_n è superiormente limitato dal minimo di B_{n+1}, e quindi ogni B_n è finito, diciamo $B_n = \{b_{n,1}, ..., b_{n,k_n}\}$. Definiamo ora $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $g(x) = 1$ se $x \notin B$, mentre $g(b_{n,s}) = b_{n,k_n-s+1}$ (in pratica la g ristretta a B_n inverte l'ordine). Per la 6, esiste $Y \in \mathcal{U}$ tale che $g_{|Y}$ sia nondecrescente. Allora deve essere $|Y \cap B_n| \leq 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dato che $X = Y \cap B \in \mathcal{U}$, abbiamo che $X \cap A_n = Y \cap B \cap A_n = Y \cap B_n$, e quindi $|X \cap A_n| \leq 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Per ottenere l'insieme selettivo desiderato, basta estendere eventualmente X aggiungendo un punto di A_n per ogni $n \in \mathbb{N}$ tale che $X \cap A_n = \emptyset$.

10. $(7 \Rightarrow 6)$ Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. 2-coloriamo $[\mathbb{N}]^2 = B \sqcup N$ nel seguente modo: se $i < j \in \mathbb{N}$, allora $\{i, j\} \in B \iff f(i) \leq f(j)$. Per 7, esiste $H \in \mathcal{U}$ tale che $[H]^2$ sia monocromatico. Allora, se $[H]^2 \subseteq N$ la f è strettamente decrescente su H, e questo è assurdo in quanto H è infinito. Ne consegue che $[H]^2 \subseteq B$, ossia f è non decrescente su H, e quindi è $\mathcal{U}$-equivalente ad una $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ nondecrescente.

11. $(2 \Rightarrow 7)$ Diamo per buono il seguente

    Lemma. *Sia $\mathcal{U}$ un ultrafiltro selettivo. Se $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \cdots$ sono elementi di $\mathcal{U}$, allora esiste un $H = \{h_1 < h_2 < \cdots\} \in \mathcal{U}$ tale che $h_1 \in B_1$ e $h_{n+1} \in B_{h_n}$.*

    Fissiamo una r-colorazione di $[\mathbb{N}]^2$: allora essa induce in modo naturale una r-colorazione di $\Delta^+ = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : x < y\}$. Si verifica facilmente che $\Delta^+ \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$: allora uno degli r colori, diciamo $A \subseteq \Delta^+$, è un elemento di $\mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$. Definiamo $\hat{A} = \{n \in \mathbb{N} : A_n \in \mathcal{U}\}$, dove $A_n = \{m \in \mathbb{N} : (n, m) \in A\}$. Allora, dato che $A \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$, abbiamo che $\hat{A} \in \mathcal{U}$ e, per ogni $a \in \hat{A}$, abbiamo $A_a \in \mathcal{U}$. Fissiamo $\hat{A} = \{a_1 < a_2 < \cdots\}$ e poniamo

    $$B_n = \hat{A} \cap \bigcap_{k\in\hat{A}\cap[1,n]} A_k.$$

    Chiaramente ogni B_n sta in $\mathcal{U}$ perchè intersezione finita di elementi di $\mathcal{U}$: inoltre, $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \cdots$. Applicando il lemma precedente, esiste un $H = \{h_1 < h_2 < \cdots\} \in \mathcal{U}$ tale che $h_1 \in B_1$ e $h_{n+1} \in B_{h_n}$. Allora $[H]^2 \equiv \{(h, h') \in H^2 : h < h'\}$ è interamente contenuto in A, e quindi è monocromatico. Infatti, se prendiamo $h_i < h_j$, allora $h_i \leq h_{j-1}$ e quindi $h_j \in B_{h_{j-1}} \subseteq B_{h_i} \subseteq A_{h_i}$, da cui che $(h_i, h_j) \in A$.

$\square$

Esercizio 10.3. Indichiamo con $\mathcal{U}_i$ l'ultrafiltro principale generato da i.

1. Gli insiemi $\mathcal{O}_A$ sono tutti e soli i clopen di βI.
2. Sia U aperto di βI. Se $A = \{i \in I : \mathcal{U}_i \in U\} = U \cap I$, allora $\overline{U} = \mathcal{O}_A$.

3. Se U è un intorno di $\mathcal{U}$, allora $\{i \in I : \mathcal{U}_i \in U\} = U \cap I \in \mathcal{U}$.

Dimostrazione.

1. Abbiamo visto a lezione che gli $\mathcal{O}_A$ sono clopen. Sia ora C un clopen. Allora $C = \bigcup_{j \in J} \mathcal{O}_{A_j}$. Dato che C è un chiuso di un compatto, C è compatto, e quindi dal ricoprimento aperto dato dagli $\mathcal{O}_{A_j}$ può essere estratto un sottoricoprimento finito: ne consegue che $C = \mathcal{O}_{A_1} \cup \cdots \cup \mathcal{O}_{A_k} = \mathcal{O}_{A_1 \cup \cdots \cup A_k}$.

2. Sia $U = \bigcup_{j \in J} \mathcal{O}_{A_j}$. Osserviamo allora che $\forall i \in A_j$ abbiamo $\mathcal{U}_i \in \mathcal{O}_{A_j} \subseteq U$, e quindi $A_j \subseteq A$. Ne consegue che $\mathcal{O}_{A_j} \subseteq \mathcal{O}_A$ per ogni $j \in J$, e quindi, essendo $\mathcal{O}_A$ chiuso, $\overline{U} \subseteq \mathcal{O}_A$. Viceversa, se $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_A \backslash U$, allora $\mathcal{U}$ è di frontiera per U. Infatti, se $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_B$ per un certo B, allora $B \in \mathcal{U}$ da cui $B \cap A \in \mathcal{U}$ e quindi esiste $i \in B \cap A$: allora $\mathcal{U}_i \in U \cap \mathcal{O}_B$ per definizione di A e per il fatto che $B \in \mathcal{U}_i$.

3. Se U è un intorno di $\mathcal{U}$, allora esiste V aperto tale che $\mathcal{U} \in V \subseteq U$. Allora, dal punto precedente, abbiamo $\mathcal{U} \in V \subseteq \overline{V} = \mathcal{O}_{V \cap I} \subseteq \mathcal{O}_{U \cap I}$ e quindi $U \cap I \in \mathcal{U}$.

□

Esercizio 10.4. Sia I un insieme infinito. Se $A \subseteq I$, allora la chiusura topologica di A in βI è $\mathcal{O}_A$.

Dimostrazione. Ricordiamo che A, visto come sottospazio di βI, è l'insieme degli ultrafiltri principali generati da un elemento di A. Innanzitutto $A \subseteq \mathcal{O}_A$: infatti, se $\mathcal{U}$ è generato da $\{a\}$ per un certo $a \in A$, allora $A \in \mathcal{U}$ da cui che $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_A$. Dato che $\mathcal{O}_A$ è chiuso, si ha $\overline{A} \subseteq \mathcal{O}_A$. Viceversa, dimostriamo che ogni elemento di $\mathcal{O}_A$ è di accumulazione per A, ossia che se $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_A$ allora per ogni $\mathcal{O}_B$ tale che $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_B$ si ha che $\mathcal{O}_B \cap A \neq \emptyset$. Se $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_B$, allora $B \in \mathcal{U}$, e quindi dato che $A \in \mathcal{U}$ si ha anche $A \cap B \in \mathcal{U}$, da cui che $A \cap B$ è non vuoto: allora, preso $\mathcal{V}$ principale generato da un elemento di $A \cap B$, abbiamo che $\mathcal{V} \in \mathcal{O}_B \cap A$. □

Esercizio 10.5. Sia $S : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la funzione somma, e siano $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \beta\mathbb{N}$. Dimostrare che $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V} = S_* (\mathcal{U} \otimes \mathcal{V})$.

Dimostrazione. Per ogni $A \subseteq \mathbb{N}$, si ha

$$\begin{aligned} S^{-1}(A) \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V} \quad &\Longleftrightarrow \quad \left\{n \in \mathbb{N} : \left(S^{-1}(A)\right)_n \in \mathcal{V}\right\} \in \mathcal{U} \\ &\Longleftrightarrow \quad \{n \in \mathbb{N} : \{m \in \mathbb{N} : S(n,m) \in A\} \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U} \\ &\Longleftrightarrow \quad \{n \in \mathbb{N} : \{m \in \mathbb{N} : n + m \in A\} \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U} \\ &\Longleftrightarrow \quad \{n \in \mathbb{N} : A - n \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U} \\ &\Longleftrightarrow \quad A \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}. \end{aligned}$$

□

11 Esercizi 31-3-2015

Per alcuni esercizi di questa sezione mi servirà il seguente

Lemma. *Siano* I, J, P, Q *insiemi non vuoti, e siano* $f : I \to P, g : J \to Q$*. Sia* $(f, g) : I \times J \to P \times Q, (i, j) \mapsto (f(i), g(j))$*. Se* $\mathcal{U} \in \beta I$ *e* $\mathcal{V} \in \beta J$*, allora*

$$(f, g)_* (\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}) = f_* (\mathcal{U}) \otimes g_* (\mathcal{V}).$$

Dimostrazione. Sia $A \subseteq P \times Q$. Definiamo $B = (f, g)^{-1} (A) \subseteq I \times J$, per ogni $i \in I$ definiamo $B_i = \{j \in J : (i, j) \in B\}$, e definiamo $\hat{B} = \{i \in I : B_i \in \mathcal{V}\}$. Allora

$$\begin{aligned} A \in (f, g)_* (\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}) &\iff B \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V} \\ &\iff \hat{B} \in \mathcal{U}. \end{aligned}$$

Per ogni $p \in P$, definiamo $A_p = \{q \in Q : (p, q) \in A\}$, e definiamo $\hat{A} = \{p \in P : A_p \in g_* (\mathcal{V})\}$. Allora

$$\begin{aligned} A \in f_* (\mathcal{U}) \otimes g_* (\mathcal{V}) &\iff \hat{A} \in f_* (\mathcal{U}) \\ &\iff f^{-1} \left(\hat{A}\right) \in \mathcal{U}. \end{aligned}$$

Ma vale $f^{-1} \left(\hat{A}\right) = \hat{B}$: infatti

$$\begin{aligned} i \in f^{-1} \left(\hat{A}\right) &\iff f(i) \in \hat{A} \\ &\iff A_{f(i)} \in g_* (\mathcal{V}) \\ &\iff g^{-1} \left(A_{f(i)}\right) \in \mathcal{V} \\ &\iff \left\{j \in J : g(j) \in A_{f(i)}\right\} \in \mathcal{V} \\ &\iff \{j \in J : (f(i), g(j)) \in A\} \in \mathcal{V} \\ &\iff B_i \in \mathcal{V} \\ &\iff i \in \hat{B} \end{aligned}$$

e questo prova che $A \in (f, g)_* (\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}) \iff \hat{B} \in \mathcal{U} \iff f^{-1} \left(\hat{A}\right) \in \mathcal{U} \iff A \in f_* (\mathcal{U}) \otimes g_* (\mathcal{V})$. $\square$

Esercizio 11.1. Dimostrare che l'operazione $\oplus$ è associativa.

Dimostrazione. Sia $S : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la funzione somma. Applicando il Lemma 11, abbiamo

$$\begin{aligned} (\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}) \oplus \mathcal{W} &= S_* ((\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}) \otimes \mathcal{W}) \\ &= S_* (S_* (\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}) \otimes \mathcal{W}) \\ &= S_* (S_* (\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}) \otimes \mathrm{id}_* (\mathcal{W})) \\ &= S_* ((S, \mathrm{id})_* ((\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}) \otimes \mathcal{W})) \\ &= (S \circ (S, \mathrm{id}))_* ((\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}) \otimes \mathcal{W}) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathcal{U} \oplus (\mathcal{V} \oplus \mathcal{W}) &= S_* (\mathcal{U} \otimes (\mathcal{V} \oplus \mathcal{W})) \\
&= S_* (\mathcal{U} \otimes S_* (\mathcal{V} \otimes \mathcal{W})) \\
&= S_* (\mathrm{id}_* (\mathcal{U}) \otimes S_* (\mathcal{V} \otimes \mathcal{W})) \\
&= S_* ((\mathrm{id}, S)_* (\mathcal{U} \otimes (\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}))) \\
&= (S \circ (\mathrm{id}, S))_* (\mathcal{U} \otimes (\mathcal{V} \otimes \mathcal{W})) .
\end{aligned}$$

A questo punto ci basta osservare che $S \circ (S, \mathrm{id}) = S \circ (\mathrm{id}, S)$ e ricordare che la $\otimes$ è associativa. $\square$

Esercizio 11.2. Dimostrare che:

1. Se $\mathcal{U}$ è idempotente, allora $k\mathbb{N} \in \mathcal{U}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

2. Esiste $\mathcal{W}$ tale che $\mathcal{W} \oplus \mathcal{U} = \mathcal{U} \iff \forall A \in \mathcal{U}$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $A - n \in \mathcal{U}$.

3. $\mathcal{U}$ è idempotente $\iff \forall A \in \mathcal{U}$ esiste $a \in A$ tale che $A - a \in \mathcal{U}$.

4. Sia ${}^*\mathbb{R}$ un modello nonstandard dei reali, e sia $\alpha \in {}^*\mathbb{N}$. Allora $\mathcal{U}_\alpha = \{A \subseteq \mathbb{N} : \alpha \in {}^*A\}$ è idempotente $\iff$ se $\alpha \in {}^*A$ allora esiste $a \in A$ tale che $\alpha + a \in {}^*A$.

Dimostrazione.

1. Dato che $\mathbb{N} = k\mathbb{N} \sqcup (k\mathbb{N}+1) \sqcup \cdots \sqcup (k\mathbb{N}+k-1)$, uno dei pezzi sta in $\mathcal{U}$, diciamo $k\mathbb{N}+u$. Ora, abbiamo
$$k\mathbb{N} \supseteq \sum_{i=1}^{k} (k\mathbb{N}+u) ,$$
e l'insieme a destra sta in $\overbrace{\mathcal{U} \oplus \cdots \oplus \mathcal{U}}^{k \text{ volte}}$ che è uguale a $\mathcal{U}$ per idempotenza. Ne consegue che $k\mathbb{N} \in \mathcal{U}$.

2. Sia $\tilde{A} = \{n \in \mathbb{N} : A - n \in \mathcal{U}\}$, e sia $\mathcal{F} = \left\{\tilde{A} : A \in \mathcal{U}\right\}$. Dimostriamo che, per ogni $\mathcal{W} \in \beta\mathbb{N}$, $\mathcal{W} \oplus \mathcal{U} = \mathcal{U}$ se e solo se $\mathcal{W}$ estende $\mathcal{F}$. Se $\mathcal{W} \oplus \mathcal{U} = \mathcal{U}$, allora ogni $A \in \mathcal{U}$ è tale che $\tilde{A} \in \mathcal{W}$. Viceversa, sia $\mathcal{W}$ che estende $\mathcal{F}$: allora, se $A \in \mathcal{U}$, abbiamo $A \in \mathcal{W} \oplus \mathcal{U}$ in quanto $\tilde{A} \in \mathcal{W}$: dunque $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{W} \oplus \mathcal{U}$, e dato che sono entrambi ultrafiltri si ha l'uguaglianza. Ora osserviamo che esiste $\mathcal{W}$ che estende $\mathcal{F}$ se e solo se ogni $\tilde{A} \in \mathcal{F}$ è non vuoto, ossia se e solo se $(\forall A \in \mathcal{U})\, (\exists n \in \mathbb{N})\, (A - n \in \mathcal{U})$. Infatti, se $\mathcal{W}$ estende $\mathcal{F}$ ovviamente ogni elemento di $\mathcal{F}$ è non vuoto, mentre se ogni elemento di $\mathcal{F}$ è non vuoto allora $\mathcal{F}$ ha la FIP, in quanto se $A_1, ..., A_n \in \mathcal{U}$ e $C = A_1 \cap \cdots \cap A_n$, allora $\tilde{C} \subseteq \tilde{A}_1 \cap \cdots \cap \tilde{A}_n$, e questa intersezione è non vuota perchè lo è $\tilde{C}$.

3. Usando la terminologia precedente, abbiamo che $\mathcal{U}$ è idempotente se e solo se $\mathcal{U}$ estende $\mathcal{F}$. Se $\mathcal{U}$ è idempotente, allora per ogni $A \in \mathcal{U}$ abbiamo $\tilde{A} \in \mathcal{U}$: prendiamo allora $a \in A \cap \tilde{A}$: allora $A - a \in \mathcal{U}$. Viceversa, se $\mathcal{U}$ non è idempotente, allora esiste $B \in \mathcal{U}$ tale che $\tilde{B} \notin \mathcal{U}$: allora $\tilde{B}^c \in \mathcal{U}$; prendiamo $A = B \cap \tilde{B}^c$. Allora, per ogni $a \in A$, si ha $a \in \tilde{B}^c$ e quindi $B - a \notin \mathcal{U}$, e dato che $A \subseteq B$ abbiamo anche che $A - a \notin \mathcal{U}$.

4. Per il punto precedente, $\mathcal{U}_\alpha$ è idempotente $\iff$ se $A \in \mathcal{U}_\alpha$ allora esiste $a \in A$ tale che $A - a \in \mathcal{U}_\alpha$ $\iff$ se $\alpha \in {}^*A$ allora esiste $a \in A$ tale che $\alpha \in {}^*A - a$ $\iff$ se $\alpha \in {}^*A$ allora esiste $a \in A$ tale che $\alpha + a \in {}^*A$.

$\square$

Esercizio 11.3. Dimostrare che, per ogni $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$ non principale, la mappa $\psi_\mathcal{U} : \mathcal{V} \mapsto \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ non è continua.

Dimostrazione. Dimostriamo che se $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$ e $\psi_\mathcal{U}$ è continua allora $\mathcal{U}$ è principale. Ci servono i seguenti fatti visti a lezione o in esercizi precedenti:

1. Il centro di $(\beta\mathbb{N}, \oplus)$ è costituito dagli ultrafiltri principali.
2. Se $f : X \to Y$ è un'applicazione continua tra spazi compatti e T_2, $(x_i)_{i \in I}$ è una I-successione a valori in X, e $\mathcal{U}$ è un ultrafiltro su I, allora
$$f\left(\mathcal{U} - \lim_{i \in I}(x_i)\right) = \mathcal{U} - \lim_{i \in I}(f(x_i)).$$
3. La mappa $\varphi_\mathcal{V} : \beta\mathbb{N} \to \beta\mathbb{N}, \varphi_\mathcal{V}(\mathcal{U}) = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ è continua.
4. Per ogni $\mathcal{V} \in \beta\mathbb{N}$, abbiamo
$$\mathcal{V} = \mathcal{V} - \lim_{n \in \mathbb{N}}(\mathcal{U}_n)$$
dove $\mathcal{U}_n$ è l'ultrafiltro principale generato da n.

Ora, se $\psi_\mathcal{U}$ è continua, allora per ogni $\mathcal{V} \in \beta\mathbb{N}$ si ha

$$\begin{aligned}
\mathcal{U} \oplus \mathcal{V} &= \psi_\mathcal{U}(\mathcal{V}) \\
&= \psi_\mathcal{U}\left(\mathcal{V} - \lim_{n \in \mathbb{N}}(\mathcal{U}_n)\right) \\
&= \mathcal{V} - \lim_{n \in \mathbb{N}}(\psi_\mathcal{U}(\mathcal{U}_n)) \\
&= \mathcal{V} - \lim_{n \in \mathbb{N}}(\mathcal{U} \oplus \mathcal{U}_n) \\
&= \mathcal{V} - \lim_{n \in \mathbb{N}}(\mathcal{U}_n \oplus \mathcal{U}) \\
&= \mathcal{V} - \lim_{n \in \mathbb{N}}(\varphi_\mathcal{U}(\mathcal{U}_n)) \\
&= \varphi_\mathcal{U}\left(\mathcal{V} - \lim_{n \in \mathbb{N}}(\mathcal{U}_n)\right) \\
&= \varphi_\mathcal{U}(\mathcal{V}) \\
&= \mathcal{V} \oplus \mathcal{U}
\end{aligned}$$

e questo prova che $\mathcal{U}$ sta nel centro di $(\beta\mathbb{N}, \oplus)$, ossia che $\mathcal{U}$ è principale.

$\square$

Esercizio 11.4. Sia $k \in \mathbb{N}$, e siano $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \beta\mathbb{N}$. Dimostrare che

$$k^{\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}} = k^{\mathcal{U}} \odot k^{\mathcal{V}}.$$

Dimostrazione. Definiamo $S, P : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ le funzioni somma e prodotto. Allora vale

$$\begin{aligned} k^{\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}} &= (\exp_k)_* (\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}) \\ &= (\exp_k)_* (S_* (\mathcal{U} \otimes \mathcal{V})) \\ &= (\exp_k \circ S)_* (\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}) ; \end{aligned}$$

applicando il Lemma 11, abbiamo anche

$$\begin{aligned} k^{\mathcal{U}} \odot k^{\mathcal{V}} &= P_* \left(k^{\mathcal{U}} \otimes k^{\mathcal{V}}\right) \\ &= P_* ((\exp_k)_* (\mathcal{U}) \otimes (\exp_k)_* (\mathcal{V})) \\ &= P_* ((\exp_k, \exp_k)_* (\mathcal{U} \otimes \mathcal{V})) \\ &= (P \circ (\exp_k, \exp_k))_* (\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}) . \end{aligned}$$

Per concludere basta osservare che $\exp_k \circ S = P \circ (\exp_k, \exp_k)$. □

12 Esercizi 13-4-2015

Per il prossimo esercizio userò la seguente

Proposizione. *Sia $A \subseteq \mathbb{Z}$. Allora*

$$BD(A) = \operatorname{st}\left(\max_{\substack{I=[\alpha,\beta]\subseteq {}^*\mathbb{Z} \\ {}^*|I| \in {}^*\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}}} \frac{{}^*\left|{}^*A \cap I\right|}{{}^*|I|} \right).$$

Dimostrazione. Ricordiamo la definizione:

$$BD(A) = \lim_{n\to\infty} \left(\max_{x\in\mathbb{Z}} \frac{|A \cap [x+1, x+n]|}{n} \right).$$

Definiamo la successione

$$\begin{aligned} a : \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto \max_{x\in\mathbb{Z}} \frac{|A \cap [x+1, x+n]|}{n}. \end{aligned}$$

Abbiamo già visto che la successione converge. Se $BD(A) = \alpha$, allora ogni sottosuccessione di $a(n)$ converge ad α, e quindi per ogni $\nu \in {}^*\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$ si ha che ${}^*a(\nu) \sim \alpha$, ossia

$$\begin{aligned} \alpha &\sim \max_{x\in{}^*\mathbb{Z}} \frac{{}^*\left|{}^*A \cap [x+1, x+\nu]\right|}{\nu} \\ &= \max_{\substack{I=[\alpha,\beta]\subseteq {}^*\mathbb{Z} \\ {}^*|I| = \nu}} \frac{{}^*\left|{}^*A \cap I\right|}{{}^*|I|}, \end{aligned}$$

da cui, per la generalità di ν, si ha che

$$\alpha \sim \max_{\substack{I=[\alpha,\beta]\subseteq {}^*\mathbb{Z} \\ {}^*|I|\in {}^*\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}}} \frac{{}^*\left|{}^*A\cap I\right|}{{}^*\left|I\right|}.$$

Viceversa, se vale quest'ultima proprietà, allora ${}^*a\left(\nu\right) \sim \alpha$ per un certo $\nu \in {}^*\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$, e quindi $a\left(n\right)$ ha una sottosuccessione convergente ad α, da cui che, essendo $a\left(n\right)$ convergente, si ha che $a\left(n\right) \to \alpha$. □

Esercizio 12.1. Siano $A, B \subseteq \mathbb{Z}$. Dimostrare che:

1. Se $A \leq_{fe} B$ allora $BD\left(A\right) \leq BD\left(B\right)$.
2. A è spesso $\iff$ A è massimale rispetto a $\leq_{fe}$ (ossia $\left(\forall B \subseteq \mathbb{Z}\right)\left(A \leq_{fe} B \to B \leq_{fe} A\right)$).
3. Se A è AP-rich e $A \leq_{fe} B$, allora B è AP-rich.
4. Se A è sindetico a tratti e $A \leq_{fe} B$, allora lo è anche B.
5. B è sindetico a tratti $\iff$ esiste A sindetico tale che $A \leq_{fe} B$.
6. Siano $A, B \subseteq \mathbb{N}$. Non vale in generale $A \leq_{fe} B \Rightarrow \overline{d}\left(A\right) \leq \overline{d}\left(B\right)$.
7. Non vale in generale A sindetico e $A \leq_{fe} B \Rightarrow B$ sindetico.

Dimostrazione. Fissiamo un modello nonstandard dei reali.

1. Se $A \leq_{fe} B$, allora nel modello standard vale

   $$\left(\forall u, v \in \mathbb{Z}\right)\left(u < v \to \exists x \in \mathbb{Z}\left(\left|A \cap [u,v]\right| \leq \left|B \cap [x+u, x+v]\right|\right)\right):$$

   infatti, esiste $x \in \mathbb{Z}$ tale che $A \cap [u,v] + x \subseteq B$ e chiaramente $A \cap [u,v] + x \subseteq [x+u, x+v]$. Allora, nel modello nonstandard vale

   $$\left(\forall u, v \in {}^*\mathbb{Z}\right)\left(u < v \to \exists x \in {}^*\mathbb{Z}\left({}^*\left|{}^*A \cap [u,v]\right| \leq {}^*\left|{}^*B \cap [x+u, x+v]\right|\right)\right).$$

   Ne consegue che per ogni intervallo infinito I di iperinteri, esiste un intervallo J di iperinteri con la stessa ipercardinalità di I e tale che ${}^*\left|{}^*A \cap I\right| \leq {}^*\left|{}^*B \cap J\right|$. Dalla caratterizzazione nonstandard della densità di Banach si ha allora la tesi.

2. In un esercizio della lezione 9 abbiamo dimostrato che A è spesso se e solo se $\mathbb{Z} \leq_{fe} A$. Inoltre, sappiamo che $\left(\forall A \subseteq \mathbb{Z}\right)\left(A \leq_{fe} \mathbb{Z}\right)$. Dunque, se A è massimale allora $\mathbb{Z} \leq_{fe} A$ e quindi A è spesso; viceversa, se A è spesso allora $\mathbb{Z} \leq_{fe} A$ e quindi, per transitività di $\leq_{fe}$, $B \leq_{fe} A$ per ogni $B \subseteq \mathbb{Z}$, da cui che A è massimale rispetto a $\leq_{fe}$.

3. Sia $F = \{x+d, x+2d, ..., x+kd\}$ una progressione aritmetica lunga k contenuta in A. Allora esiste $y \in \mathbb{Z}$ tale che $F + z \subseteq B$, e quindi $F + z$ è una progressione aritmetica lunga k contenuta in B. Per la generalità di $k \in \mathbb{N}$ si ha la tesi.

4. Sia A sindetico a tratti. Allora esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che esistono intervalli finiti I arbitrariamente lunghi e tali che i "buchi" di $A \cap I$ siano di ampiezza $\leq k$. Dato che ogni $A \cap I$ con I intervallo finito è finito, B contiene un traslato di $A \cap I$, ossia esiste un intervallo J tale che $|J| = |I|$ e $A \cap I + x \subseteq B \cap J$ per un certo $x \in \mathbb{Z}$. Allora i buchi di $B \cap J$ hanno ampiezza $\leq k$, e quindi per la generalità di I abbiamo la tesi.

5. ($\Leftarrow$) Se esiste A k-sindetico tale che $A \leq_{fe} B$, allora B è k-sindetico a tratti. Infatti, supponiamo che A sia k-sindetico. Allora $A \cap [1, n]$ ha buchi di ampiezza $\leq k$ per ogni $n \in \mathbb{N}$: dato che esiste $x \in \mathbb{Z}$ tale che $A \cap [1, n] + x \subseteq B$, abbiamo che $A \cap [1, n] + x \subseteq B \cap [x + 1, x + n]$ e quindi B ha buchi di ampiezza $\leq k$ su un intervallo lungo n. Per la generalità di $n \in \mathbb{N}$, si ha che B è k-sindetico a tratti.
($\Rightarrow$) Sia B sindetico a tratti. Allora esiste un intervallo infinito $[\alpha, \beta] \subseteq {}^*\mathbb{N}$ tale che $[\alpha, \beta] \cap {}^*B$ abbia solo buchi finiti. Sia $S = \{n \in \mathbb{N} : \alpha + n \in {}^*B\}$. Allora S è chiaramente sindetico. Dato che $S + \alpha \subseteq {}^*B$, per la caratterizzazione nonstandard di $\leq_{fe}$ si ha $S \leq_{fe} B$.

6. Sia B spesso tale che $\overline{d}(B) = 0$ (la cui esistenza è garantita da un esercizio della lezione 7). Dato che B è spesso, si ha $\mathbb{N} \leq_{fe} B$. Dato che $\overline{d}(\mathbb{N}) = 1$, abbiamo la tesi.

7. Sia B sindetico a tratti e non sindetico (esiste banalmente). Allora, per il punto 5, abbiamo che esiste A sindetico tale che $A \leq_{fe} B$.

$\square$

Esercizio 12.2. Sia $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N} \backslash \mathbb{N}$. Le seguenti sono equivalenti:

1. $\mathcal{U}$ è un P-point, ossia per ogni famiglia $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{U}$, esiste $X \in \mathcal{U}$ tale che $\mathcal{O}_X \backslash \mathbb{N} \subseteq \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_{A_n}\right) \backslash \mathbb{N}$.

2. Per ogni partizione propria $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di $\mathbb{N}$ tale che $C_n \notin \mathcal{U}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, esiste $X \in \mathcal{U}$ tale che $X \cap C_n$ sia finito per ogni $n \in \mathbb{N}$.

3. Per ogni $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ esiste $X \in \mathcal{U}$ tale che $f_{|X}$ sia costante o finite-to-one.

4. Se ${}^*\mathbb{R} = \frac{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}{\mathcal{U}}$ e $\xi \in {}^*\mathbb{R}$ è infinitesimo, allora esiste $h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ infinitesima tale che $[h] = \xi$.

Dimostrazione.

1. ($1 \Rightarrow 2$) Chiamiamo $A_n = C_n^c$. Allora $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{U}$, e quindi per la 1 esiste $X \in \mathcal{U}$ tale che $\mathcal{O}_X \backslash \mathbb{N} \subseteq \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_{A_n}\right) \backslash \mathbb{N}$. Allora $X \cap A_n^c$ è finito per ogni $n \in \mathbb{N}$: infatti, se per assurdo avessimo $X \cap A_j^c$ infinito, allora la famiglia $\left\{X, A_j^c\right\}$ si potrebbe estendere ad un ultrafiltro nonprincipale $\mathcal{W}$ che contiene X ma non A_j, assurdo.

2. ($2 \Rightarrow 3$) Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e sia $C_n = f^{-1}(n)$. Allora $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una partizione di $\mathbb{N}$. Se $C_n \in \mathcal{U}$ per qualche $n \in \mathbb{N}$, allora dato che $f_{|C_n}$ è costantemente uguale a n abbiamo finito. Supponiamo quindi che $C_n \notin \mathcal{U}$ per ogni n. Allora, dato che $\mathcal{U}$ è un ultrafiltro, esistono infiniti $n \in \mathbb{N}$ tali che $C_n \neq \emptyset$, e quindi per la 2 abbiamo che esiste $X \in \mathcal{U}$ tale che $X \cap C_n$ sia finito per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora la funzione $f_{|X}$ è finite-to-one.

3. $(3 \Rightarrow 4)$ Sia $\xi \in {}^*\mathbb{R}$ infinitesimo, diciamo $\xi = [g]$ dove $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Definiamo
$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto \begin{cases} m+1 & \frac{1}{m+1} \leq |g(n)| < \frac{1}{m} \\ 1 & g(n) = 0 \end{cases}. \end{aligned}$$
Per la 3, esiste $X \in \mathcal{U}$ tale che $f_{|X}$ sia costante o finite-to-one. Se $f_{|X}$ è costante, allora deve essere costante in 1, e quindi $g_{|X}$ deve essere costante in 0 (e quindi la tesi è ovvia): infatti, se per assurdo avessimo $f_{|X}$ costante in un certo $m+1$ con $m \in \mathbb{N}$, allora per ogni $x \in X$ si avrebbe $\frac{1}{m+1} \leq |g(x)| < \frac{1}{m}$ e quindi avremmo $\frac{1}{m+1} \leq \xi < \frac{1}{m}$, assurdo in quanto ξ è infinitesimo. Supponiamo quindi che $f_{|X}$ sia finite-to-one, e poniamo $X = \{x_1 < x_2 < \cdots\}$. Allora la sottosuccessione $(g(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ è infinitesima: infatti, per ogni $m \in \mathbb{N}$, l'insieme degli indici $x \in X$ per i quali $|g(x)| \geq \frac{1}{m+1}$ è finito, e quindi $|g(x)|$ è definitivamente $< \frac{1}{m+1}$ per ogni $m \in \mathbb{N}$. Definiamo $h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ponendo $h(x_n) = g(x_n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $h(y) = 0$ per ogni $y \notin X$: allora h è ovviamente infinitesima, e inoltre $h \equiv_{\mathcal{U}} g$ da cui $[h] = \xi$.

4. $(4 \Rightarrow 1)$ Sia $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{U}$. Definiamo $C_1 = A_1^c$ e $C_{n+1} = A_{n+1}^c \cap A_1 \cap \cdots \cap A_n$. I C_n sono ovviamente a due a due disgiunti, e per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $C_n \notin \mathcal{U}$ in quanto $C_n \subseteq A_n^c \notin \mathcal{U}$. Definiamo ora $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ che manda ogni elemento di C_n in $\frac{1}{n}$, e ogni elemento di $\left(\bigcup_n C_n\right)^c$ in 0. Allora $\xi = [f]$ è infinitesimo: infatti, $\left\{x \in \mathbb{N} : f(x) < \frac{1}{n}\right\} \supseteq (C_1 \cup \cdots \cup C_n)^c \in \mathcal{U}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Per la 4, esiste $h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e $X \in \mathcal{U}$ tale che $h_{|X} = f_{|X}$ e la h sia infinitesima. Allora $X \cap C_n$ è finito per ogni $n \in \mathbb{N}$: infatti, dato che h è infinitesima, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $x > N$ si ha $h(x) < \frac{1}{n}$ e quindi $x \notin C_n$: ne consegue che $X \cap C_n \subseteq [1, N]$ e quindi è finito. Ora, sia $\mathcal{V}$ un ultrafiltro nonprincipale contenente X. Dimostriamo per induzione su n che $A_n \in \mathcal{V}$.

   (a) $(n = 1)$ Se per assurdo $A_1 \notin \mathcal{V}$, allora $C_1 \in \mathcal{V}$ e quindi $X \cap C_1 \in \mathcal{V}$, assurdo in quanto $\mathcal{V}$ è nonprincipale e $X \cap C_1$ è finito.

   (b) (Vero fino a n, mostro per $n+1$) Se per assurdo $A_{n+1} \notin \mathcal{V}$, allora $A_{n+1}^c \in \mathcal{V}$, e quindi per ipotesi induttiva $C_{n+1} = A_{n+1}^c \cap A_1 \cap \cdots \cap A_n \in \mathcal{V}$, e quindi $X \cap C_{n+1} \in \mathcal{V}$, assurdo in quanto $\mathcal{V}$ è non principale e $X \cap C_{n+1}$ è finito.

□

13 Esercizi 14-4-2015

Esercizio 13.1. Esistono $A, B \subseteq \mathbb{N}$ con $\overline{d}(A) = \overline{d}(B) = 1$ tali che $A - B$ non sia sindetico.

Dimostrazione. Dati X, Y sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ e $d \in \mathbb{N}$, diremo che $X <_d Y$ se $\min(Y) - \max(X) \geq d$. Definiremo induttivamente quattro successioni $(a_n^-)_{n \in \mathbb{N}}, (a_n^+)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n^-)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n^+)_{n \in \mathbb{N}}$ tali che:

1. $a_n^- < a_n^+ < b_n^- < b_n^+ < a_{n+1}^-$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
2. detti $A_n = [a_n^-, a_n^+]$, $B_n = [b_n^-, b_n^+]$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ valga
$$\bigcup_{m < n+1} (A_{n+1} - B_m) \quad <_n \quad \bigcup_{m < n+2} (A_{n+1} - B_m)$$

3. valgano

$$\begin{aligned}
\frac{\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^+ - a_k^- + 1\right)}{a_n^+} &\geq \frac{n}{n+1} \\
\frac{\sum_{k=1}^{n}\left(b_k^+ - b_k^- + 1\right)}{b_n^+} &\geq \frac{n}{n+1}.
\end{aligned}$$

Se ci riusciamo, allora gli insiemi $A = \bigcup_n A_n$ e $B = \bigcup_n B_n$ soddisfano la tesi. Infatti, per la proprietà 1 abbiamo $A_1 < B_1 < A_2 < B_2 < \cdots$, e quindi

$$A - B = \bigcup_{n \geq 2} \bigcup_{m<n} \left(A_n - B_m\right),$$

da cui che, per la proprietà 2, $A - B$ ha buchi di ampiezza arbitrariamente lunga, dunque $A - B$ non è sindetico. Inoltre, per definizione di $\overline{d}\,(A)$, abbiamo

$$\begin{aligned}
\overline{d}\,(A) &= \limsup_{n\to\infty} \frac{|A \cap [1, n]|}{n} \\
&\geq \limsup_{n\to\infty} \frac{|A \cap [1, a_n^+]|}{a_n^+} \\
&= \limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^+ - a_k^- + 1\right)}{a_n^+} \\
&\geq \limsup_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \\
&= 1
\end{aligned}$$

e analogamente si ha $\overline{d}\,(B) \geq 1$, da cui $\overline{d}\,(A) = \overline{d}\,(B) = 1$.
Definiamo $a_1^- = 1$. Definiamo successivamente

$$\begin{aligned}
a_n^+ &= \max\left\{a_n^- + 1, (n+1)\left(a_n^- - 1 - \sum_{k=1}^{n-1}\left(a_k^+ - a_k^- + 1\right)\right)\right\} \\
b_n^- &= a_n^+ + 1 \\
b_n^+ &= \max\left\{b_n^- + 1, (n+1)\left(b_n^- - 1 - \sum_{k=1}^{n-1}\left(b_k^+ - b_k^- + 1\right)\right)\right\} \\
a_{n+1}^- &= \max\left\{b_n^+ + 1, a_n^+ + b_n^+ - b_1^- + n - 1\right\}.
\end{aligned}$$

1. Banalmente si ha $a_n^- < a_n^+ < b_n^- < b_n^+ < a_{n+1}^-$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

2. Per la proprietà 1, abbiamo che $\max\left(\bigcup_{m<n+1}\left(A_{n+1} - B_m\right)\right) = a_{n+1}^+ - b_1^-$ e $\min\left(\bigcup_{m<n+2}\left(A_{n+2} - B_m\right)\right) = a_{n+2}^- - b_{n+1}^+$. Allora si ha

   $$\begin{aligned}
   \left(a_{n+2}^- - b_{n+1}^+\right) - \left(a_{n+1}^+ - b_1^-\right) &\geq \left(a_{n+1}^+ + b_{n+1}^+ - b_1^- + n - b_{n+1}^+\right) - \left(a_{n+1}^+ - b_1^-\right) \\
   &= n,
   \end{aligned}$$

   e quindi la proprietà 2 vale.

3. Abbiamo

$$\begin{aligned}
\frac{\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^+ - a_k^- + 1\right)}{a_n^+} &= \frac{a_n^+ - a_n^- + 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(a_k^+ - a_k^- + 1\right)}{a_n^+} \\
&= 1 - \frac{a_n^- - 1 - \sum_{k=1}^{n-1}\left(a_k^+ - a_k^- + 1\right)}{a_n^+} \\
&\geq 1 - \frac{a_n^- - 1 - \sum_{k=1}^{n-1}\left(a_k^+ - a_k^- + 1\right)}{(n+1)\left(a_n^- - 1 - \sum_{k=1}^{n-1}\left(a_k^+ - a_k^- + 1\right)\right)} \\
&= \frac{n}{n+1}
\end{aligned}$$

e analogamente si ragiona per i $b_i^{\pm}$.

□

14 Esercizi 27-4-2015

Esercizio 14.1. Sia $X \subseteq \mathbb{N}$. Definiamo $FS_k(X) = \{x_1 + \cdots + x_k : x_1, ..., x_k \in X \text{ distinti}\}$. Per $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$ e $k \in \mathbb{N}$, definiamo $\oplus_k \mathcal{U} = \mathcal{U} \oplus \cdots \oplus \mathcal{U}$ k volte.

1. Se $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \beta\mathbb{N}$ e $X \in \mathcal{U}, Y \in \mathcal{V}$, allora $X + Y \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$.
2. Se $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$ e $X \in \mathcal{U}$, allora $FS_2(X) \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}$.
3. Sia $A \subseteq \mathbb{N}$. Allora esiste $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$ tale che $A \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}$ se e solo se esiste $X \subseteq \mathbb{N}$ infinito tale che $FS_2(X) \subseteq A$.
4. Sia $A \subseteq \mathbb{N}$. Allora esistono $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \beta\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$ tali che $A \in (\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}) \cap (\mathcal{V} \oplus \mathcal{U})$ se e solo se esistono $X, Y \subseteq \mathbb{N}$ infiniti e tali che $X + Y \subseteq A$.
5. Se $\mathcal{U}_1, ..., \mathcal{U}_k \in \beta\mathbb{N}$ e $X_i \in \mathcal{U}_i$, allora $X_1 + \cdots + X_k \in \oplus_k \mathcal{U}$.
6. Se $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$ e $X \in \mathcal{U}$, allora $FS_k(X) \in \oplus_k \mathcal{U}$.
7. Sia $A \subseteq \mathbb{N}$. Allora esiste $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$ tale che $A \in \oplus_k \mathcal{U}$ se e solo se esiste $X \subseteq \mathbb{N}$ infinito tale che $FS_k(X) \subseteq A$.
8. Sia $A \subseteq \mathbb{N}$. Allora esistono $\mathcal{U}_1, ..., \mathcal{U}_k \in \beta\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$ tali che $A \in \bigcap_{\{i_1,...,i_k\}=\{1,...,k\}} (\mathcal{U}_{i_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{U}_{i_k})$ se e solo se esistono $X_1, ..., X_k \subseteq \mathbb{N}$ infiniti e tali che $X_1 + \cdots + X_k \subseteq A$.

Dimostrazione. Chiamiamo $S_k : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ la funzione somma di k addendi.

1. Osserviamo che $X \subseteq \{n \in \mathbb{N} : X + Y - n \in \mathcal{V}\}$: infatti, se $x \in X$, allora $X + Y - x \supseteq Y$ e quindi $X + Y - x \in \mathcal{V}$. Ne consegue che $\{n \in \mathbb{N} : X + Y - n \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$, ossia $X + Y \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$.
2. Analogamente a prima, se $X \in \mathcal{U}$ allora $X \times X \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$. Dato che $\mathcal{U}$ è non principale, abbiamo già visto che $\Delta^+ = \{(x, y) : x < y\} \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$: allora $X \times X \cap \Delta^+ \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$. Ne consegue che $S_2(X \times X \cap \Delta^+) = \{x + x' : x, x' \in X, x < x'\} = FS_2(X) \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}$.

3. ($\Rightarrow$) Se esiste $X \subseteq \mathbb{N}$ infinito tale che $FS_2(X) \subseteq A$, allora prendiamo $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N} \backslash \mathbb{N}$ tale che $X \in \mathcal{U}$. Allora $FS_2(X) \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}$, e quindi $A \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}$.
   ($\Leftarrow$) Supponiamo che $A \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}$ per un certo $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N} \backslash \mathbb{N}$. Allora, $\hat{A} = \{n \in \mathbb{N} : A - n \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{U}$. Definiamo allora

$$\begin{aligned} x_1 &\in \hat{A} \\ x_2 &\in \hat{A} \cap (A - x_1) \cap \{x_1\}^c \\ &\vdots \\ x_{n+1} &\in \hat{A} \cap (A - x_1) \cap \cdots \cap (A - x_n) \cap \{x_1, ..., x_n\}^c \\ &\vdots \quad . \end{aligned}$$

   La definizione è ben posta perchè $\hat{A}$ è ovviamente non vuoto, e se $x_1, ..., x_n$ rispettano le prime n condizioni, allora $A - x_1, ..., A - x_n \in \mathcal{U}$ e, dato che $\{x_1, ..., x_n\}^c \in \mathcal{U}$ essendo $\mathcal{U}$ non principale, abbiamo che l'intersezione nella $n+1$-esima condizione è non vuota e quindi possiamo scegliere anche x_{n+1}. Ora, X è infinito per costruzione. Mostriamo che $FS_2(X) \subseteq A$: infatti, se $i \neq j$, allora WLOG $i < j$ e quindi $x_j \in A - x_i$, ossia $x_i + x_j \in A$.

4. L'argomento è molto simile a quello del punto precedente.
   ($\Rightarrow$) Se esistono $X, Y \subseteq \mathbb{N}$ infiniti e tali che $X + Y \subseteq A$, allora prendiamo $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \beta\mathbb{N} \backslash \mathbb{N}$ tali che $X \in \mathcal{U}$ e $Y \in \mathcal{V}$. Allora $X + Y \in (\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}) \cap (\mathcal{V} \oplus \mathcal{U})$, e quindi $A \in (\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}) \cap (\mathcal{V} \oplus \mathcal{U})$.
   ($\Leftarrow$) Supponiamo che $A \in (\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}) \cap (\mathcal{V} \oplus \mathcal{U})$ per certi $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \beta\mathbb{N} \backslash \mathbb{N}$. Allora, detti $\hat{A}_{\mathcal{V}} = \{n \in \mathbb{N} : A - n \in \mathcal{U}\}$ e $\hat{A}_{\mathcal{U}} = \{n \in \mathbb{N} : A - n \in \mathcal{V}\}$, abbiamo che $\hat{A}_{\mathcal{U}} \in \mathcal{U}$ e $\hat{A}_{\mathcal{V}} \in \mathcal{V}$. Definiamo ora induttivamente $X = \{x_1, x_2, ...\}$ e $Y = \{y_1, y_2, ...\}$ scegliendo

$$\begin{array}{rl} x_1 \in \hat{A}_{\mathcal{U}} & y_1 \in \hat{A}_{\mathcal{V}} \cap (A - x_1) \\ x_2 \in \hat{A}_{\mathcal{U}} \cap (A - y_1) \cap \{x_1\}^c & y_2 \in \hat{A}_{\mathcal{V}} \cap (A - x_1) \cap (A - x_2) \cap \{y_1\}^c \\ & \vdots \\ x_{n+1} \in \hat{A}_{\mathcal{U}} \cap (A - y_1) \cap \cdots \cap (A - y_n) \cap \{x_1, ..., x_n\}^c & y_{n+1} \in \hat{A}_{\mathcal{V}} \cap (A - x_1) \cap \cdots \cap (A - x_{n+1}) \cap \{y_1, ..., y_n\}^c \\ & \vdots \quad . \end{array}$$

   Si dimostra come prima che la definizione è ben posta. Ora, X e Y sono infiniti per costruzione. Inoltre, $X + Y \subseteq A$: infatti, se $i \leq j$ allora $y_j \in A - x_i$ e quindi $x_i + y_j \in A$, mentre se $i > j$ allora $x_i \in A - y_j$ e quindi $x_i + y_j \in A$.

5. Per induzione su k. Il caso $k = 2$ è il punto 1 dell'esercizio. Supponiamo vera la tesi per $k \geq 2$ e dimostriamola per $k + 1$. Ma se $X_1 \in \mathcal{U}_1, ..., X_{k+1} \in \mathcal{U}_{k+1}$, per ipotesi induttiva $X_1 + \cdots + X_k \in \mathcal{U}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{U}_k$, e quindi per il punto 1 si ha $(X_1 + \cdots + X_k) + X_{k+1} \in (\mathcal{U}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{U}_k) \oplus \mathcal{U}_{k+1}$.

6. Per ogni $k \geq 2$, definiamo $S_k : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ la funzione somma, e definiamo $\Delta_k^+ = \{(x_1, ..., x_k) \in \mathbb{N}^k : x_1 < x_2 < \cdots < x_k$ Allora la dimostrazione procede in modo identico al punto 2 a patto che $S_{k*}(\otimes_k \mathcal{U}) = \oplus_k \mathcal{U}$ e che $\Delta_k^+ \in \otimes_k \mathcal{U}$. Abbiamo già dimostrato in un esercizio della lezione 2 (dimostrazione di Ramsey infinito) che $\Delta_k^+ \in \otimes_k \mathcal{U}$. Dimostriamo ora per induzione su k che $S_{k*}(\otimes_k \mathcal{U}) = \oplus_k \mathcal{U}$. Il caso $k = 2$ è già stato visto. Supponiamo vera la tesi per $k \geq 2$, e dimostriamola per $k + 1$.

Osserviamo che si ha $S_{k+1} = S_2 \circ (S_k \times \mathrm{id})$: allora, per il Lemma 11 e per l'ipotesi induttiva, abbiamo che

$$\begin{aligned} S_{k+1*}\left(\otimes_{k+1}\mathcal{U}\right) &= S_{2*}\left(\left(S_k \times \mathrm{id}\right)_*\left(\otimes_{k+1}\mathcal{U}\right)\right) \\ &= S_{2*}\left(S_{k*}\left(\otimes_k\mathcal{U}\right) \otimes \mathrm{id}_*\left(\mathcal{U}\right)\right) \\ &= S_{2*}\left(\left(\oplus_k\mathcal{U}\right) \otimes \mathcal{U}\right) \\ &= \left(\oplus_k\mathcal{U}\right) \oplus \mathcal{U} \\ &= \oplus_{k+1}\mathcal{U}. \end{aligned}$$

7. ($\Rightarrow$) Supponiamo che esista X infinito tale che $FS_k(X) \subseteq A$. Sia $\mathcal{U}$ ultrafiltro non principale contenente X: allora per il punto precedente $FS_k(X) \in \oplus_k\mathcal{U}$ e quindi $A \in \oplus_k\mathcal{U}$.
($\Leftarrow$) Per ogni $B \subseteq \mathbb{N}$, definiamo

$$\begin{aligned} B^{(0)} &= B \\ B^{(j+1)} &= \left\{n \in \mathbb{N} : (B-n)^{(j)} \in \mathcal{U}\right\} \ \ (1 \leq j \leq k-1). \end{aligned}$$

Si verifica facilmente per induzione che $B \in \oplus_k\mathcal{U}$ se e solo se $B^{(k-1)} \in \mathcal{U}$. Supponiamo ora che $A \in \oplus_k\mathcal{U}$ per $k \geq 2$. Definiamo induttivamente un insieme infinito $X = \{x_1, x_2, ...\}$ tale che

$$\begin{aligned} x_1 \in X_1 &= A^{(k-1)} \\ x_{n+1} \in X_{n+1} &= \bigcap_{j=0}^{k-1}\left(\bigcap_{1 \leq i_1 < \cdots < i_j \leq n}\left(A - \left(x_{i_1} + \cdots + x_{i_j}\right)\right)^{(k-1-j)}\right) \cap \{x_1, ..., x_n\}^c. \end{aligned}$$

Se X è ben definito, allora $FS_k(X) \subseteq A$: infatti, siano $x_{i_1}, ..., x_{i_k} \in X$ con $i_1 < \cdots < i_k$; allora, per costruzione, abbiamo che $x_{i_k} \in A - \left(x_{i_1} + \cdots + x_{i_{k-1}}\right)$, e quindi $x_{i_1} + \cdots + x_{i_{k-1}} + x_{i_k} \in A$.
Dimostriamo ora che la definizione precedente è ben posta: per fare questo, si verifica induttivamente che ogni X_n sta in $\mathcal{U}$, e questo è sufficiente: infatti, in tal caso abbiamo che ogni X_n è non vuoto.

8. ($\Rightarrow$) Supponiamo che esistano $X_1, ..., X_k$ infiniti tali che $X_1 + \cdots + X_k \subseteq A$. Scegliamo $\mathcal{U}_i$ non principale contenente X_i: allora, se $\{i_1, ..., i_k\} = \{1, ..., k\}$, abbiamo $X_1 + \cdots + X_k = X_{i_1} + \cdots + X_{i_k} \in \mathcal{U}_{i_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{U}_{i_k}$, e quindi anche A ci sta.
($\Leftarrow$) Siano $\mathcal{U}_1, ..., \mathcal{U}_k \in \beta\mathbb{N}$. Per ogni $B \subseteq \mathbb{N}$, definiamo $B^{(0)} = B$ e

$$B^{(j)}_{i_1,...,i_j} = \left\{n \in \mathbb{N} : (B-n)^{(j-1)}_{i_2,...,i_j} \in \mathcal{U}_{i_1}\right\}$$

dove $j \in \{1, ..., k-1\}$, $|\{i_1, ..., i_j\}| = j$ e $1 \leq i_1, ..., i_j \leq k$. Si verifica facilmente per induzione su k che $B \in \mathcal{U}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{U}_k$ se e solo se $B^{(k-1)}_{2,...,k} \in \mathcal{U}_1$. Supponiamo ora che $A \in \bigcap_{\{i_1,...,i_k\}=\{1,...,k\}}\left(\mathcal{U}_{i_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{U}_{i_k}\right)$. Fissiamo su $\mathbb{N}^2$ un ordinamento lessicografico dato da $(i,j) < (i',j') \iff [(i < i') \vee (i = i' \wedge j < j')]$, e definiamo induttivamente (seguendo l'ordine lessicografico appena definito, che ha lo stesso tipo d'ordine di ω) una successione di punti x_j^i e di insiemi C_j^i con $i \in \{1,...,k\}$ e $j \in \mathbb{N}$. Definiamo $x_j^i \in C_j^i \cap \left\{x_1^i,...,x_{j-1}^i\right\}^c$, con

$$\begin{aligned} C_j^i &= \bigcap \left(A - x_{q_1}^{p_1} - \cdots - x_{q_h}^{p_h}\right)^{(k-1-h)}_{p_{h+1},...,p_{k-1}} \\ & \quad \text{dove:} \\ & \quad 0 \leq h \leq k-1 \\ & \quad \{p_1,...,p_{k-1}\} = \{1,..,i-1,i+1,..,k\} \\ & \quad (\forall t \in \{1,...,h\}) \left((p_t,q_t) < (i,j)\right). \end{aligned}$$

Dimostriamo dopo che la definizione è ben posta, e definiamo $X_i = \left\{x_n^i : n \in \mathbb{N}\right\}$ per $1 \leq i \leq k$. Per costruzione gli X_i sono tutti infiniti. Ora dimostriamo che $X_1 + \cdots + X_k \subseteq A$. Prendiamo $x_{q_i}^i \in X_i$ per $1 \leq i \leq k$, e ordiniamoli ordinando in modo crescente le coppie (i, q_i) secondo l'ordinamento lessicografico precedente: $x_{q_{i_1}}^{i_1} < \cdots < x_{q_{i_k}}^{i_k}$ per $\{i_1,...,i_k\} = \{1,...,k\}$. Allora, per costruzione, osserviamo che $x_{q_{i_k}}^{i_k} \in A - x_{q_{i_1}}^{i_1} - \cdots - x_{q_{i_{k-1}}}^{i_{k-1}}$ ossia la tesi.
Ora dimostriamo che la definizione è ben posta. Per fare questo, si verifica induttivamente che $C_j^i \in \mathcal{U}_i$ per ogni $j \in \mathbb{N}$, e questo è sufficiente: infatti, in tal caso abbiamo che $C_j^i \cap \left\{x_1^i,...,x_{j-1}^i\right\}^c$ è non vuoto in quanto $\mathcal{U}_i$ è non principale.

□

Esercizio 14.2. Dimostrare che se $\mathcal{V} \in \beta\mathbb{N}$ e $\mathcal{F}$ è un filtro su $\mathbb{N}$, allora per ogni $\mathcal{W} \in \beta\mathbb{N}$ si ha $\mathcal{W} \supseteq \mathcal{F} \oplus \mathcal{V}$ se e solo se esiste $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$ tale che $\mathcal{U} \supseteq \mathcal{F}$ e $\mathcal{W} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{W} \in \beta\mathbb{N}$. ($\Leftarrow$) Se esiste $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$ tale che $\mathcal{U} \supseteq \mathcal{F}$ e $\mathcal{W} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$, allora chiaramente $\mathcal{W} \supseteq \mathcal{F} \oplus \mathcal{V}$. ($\Rightarrow$) Supponiamo che $\mathcal{W} \supseteq \mathcal{F} \oplus \mathcal{V}$. L'insieme $S = \{\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N} : \mathcal{U} \supseteq \mathcal{F}\}$ è un chiuso di $\beta\mathbb{N}$, in quanto intersezione di chiusi:

$$S = \bigcap_{A \in \mathcal{F}} \mathcal{O}_A.$$

Ora, dato che la mappa

$$\begin{aligned} \psi_{\mathcal{V}} : \beta\mathbb{N} &\to \beta\mathbb{N} \\ \mathcal{U} &\mapsto \mathcal{U} \oplus \mathcal{V} \end{aligned}$$

è continua, e $\beta\mathbb{N}$ è compatto e T_2, allora $\psi_{\mathcal{V}}$ è anche chiusa: dunque l'insieme $\Sigma = \psi_{\mathcal{V}}(S) = \{\mathcal{U} \oplus \mathcal{V} : \mathcal{U} \supseteq \mathcal{F}\}$ è un chiuso di $\beta\mathbb{N}$. Per concludere basta dimostrare che $\mathcal{W} \in \overline{\Sigma}$, ossia che ogni intorno di $\mathcal{W}$ interseca Σ.
Sia $A \in \mathcal{W}$: vogliamo dimostrare che esiste $\mathcal{U} \supseteq \mathcal{F}$ ultrafiltro tale che $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V} \in \mathcal{O}_A$, ossia $A \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$. Allora, detto $\hat{A} = \{n \in \mathbb{N} : A - n \in \mathcal{V}\}$, basta verificare che $\mathcal{F} \cup \left\{\hat{A}\right\}$ ha la FIP. Osserviamo che, per ogni $x \in \mathbb{N}$, si ha $(A - x)^c = A^c - x$: infatti, $y \notin A - x$ se e solo se $y + x \notin A$ se e solo se $y + x \in A^c$ se e solo se $y \in A^c - x$. Ne consegue che $\hat{A}^c = \widehat{A^c}$: infatti, $x \notin \hat{A} \iff A - x \notin \mathcal{V} \iff (A - x)^c \in \mathcal{V} \iff A^c - x \in \mathcal{V} \iff \widehat{A^c} \in \mathcal{V}$. Ora, se $X \in \mathcal{F}$ e per assurdo $X \cap \hat{A} = \emptyset$, allora $X \subseteq \hat{A}^c = \widehat{A^c}$, dunque $\widehat{A^c} \in \mathcal{F}$, e dunque $A^c \in \mathcal{F} \oplus \mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$, assurdo. □

15 Esercizi 28-4-2015

16 Esercizi 4-5-2015

Esercizio 16.1. Sia $A \subseteq \mathbb{Z}$. Dimostrare che:

1. A è spesso $\iff$ esiste $\mathcal{V} \in \beta\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$ tale che $\beta\mathbb{N} \oplus \mathcal{V} \subseteq \mathcal{O}_A$.
2. A è sindetico $\iff$ per ogni $\mathcal{V} \in \beta\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$ si ha $(\beta\mathbb{N} \oplus \mathcal{V}) \cap \mathcal{O}_A \neq \emptyset$.

Dimostrazione. Fissiamo un modello non standard ${}^*\mathbb{R}$ in cui per ogni $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$ esista $\alpha \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$ tale che $\mathcal{U} = \mathcal{U}_\alpha$. Osserviamo che, se $\alpha \in {}^*\mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}$, allora $\mathcal{U}_n \oplus \mathcal{U}_\alpha = \mathcal{U}_{\alpha+n}$: infatti, se $X \in \mathcal{U}_n \oplus \mathcal{U}_\alpha$, allora $\{k \in \mathbb{N} : X - k \in \mathcal{U}_\alpha\} \in \mathcal{U}_n \iff X - n \in \mathcal{U}_\alpha \iff \alpha \in {}^*(X-n) = {}^*X - n \iff \alpha + n \in {}^*X \iff X \in \mathcal{U}_{\alpha+n}$.

1. ($\Leftarrow$) Se esiste $\mathcal{V} \in \beta\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$ tale che $\beta\mathbb{N} \oplus \mathcal{V} \subseteq \mathcal{O}_A$, sia $\alpha \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$ tale che $\mathcal{V} = \mathcal{U}_\alpha$. Allora $A \in \mathcal{U}_n \oplus \mathcal{U}_\alpha = \mathcal{U}_{\alpha+n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, il che equivale a dire che $\{\alpha + n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq {}^*A$: allora, per overspill, ${}^*A$ contiene un intervallo infinito e quindi A è spesso.
   ($\Rightarrow$) Se A è spesso, allora esiste ${}^*A$ contiene un intervallo infinito, e quindi esiste $\alpha \in {}^*\mathbb{N}$ tale che $\{\alpha + n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq {}^*A$. Ma allora $A \in \mathcal{U}_{\alpha+n} = \mathcal{U}_n \oplus \mathcal{U}_\alpha$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e quindi se P è l'insieme degli ultrafiltri principali allora $P \oplus \mathcal{U}_\alpha \subseteq \mathcal{O}_A$. Dato che $\mathcal{O}_A$ è chiuso, si ha anche $\overline{P \oplus \mathcal{U}_\alpha} \subseteq \mathcal{O}_A$. Ma la $\oplus$ è continua nel primo argomento, e quindi $\overline{P} \oplus \mathcal{U}_\alpha \subseteq \overline{P \oplus \mathcal{U}_\alpha}$. Dato che i principali sono densi in $\beta\mathbb{N}$, si ha la tesi.
2. A è sindetico $\iff$ A^c non è denso $\iff$ per ogni $\mathcal{V} \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ esiste $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$ tale che $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V} \notin \mathcal{O}_{A^c}$ $\iff$ per ogni $\mathcal{V} \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ esiste $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$ tale che $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V} \in \mathcal{O}_A$ $\iff$ per ogni $\mathcal{V} \in \beta\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$ si ha $(\beta\mathbb{N} \oplus \mathcal{V}) \cap \mathcal{O}_A \neq \emptyset$.

□

Esercizio 16.2. Dimostrare che se L è un ideale sinistro di $(\beta\mathbb{N}, \oplus)$ allora anche $\overline{L}$ lo è.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{U} \in \overline{L}$, e sia $\mathcal{V} \in \beta\mathbb{N}$. Dimostriamo che $\mathcal{V} \oplus \mathcal{U} \in \overline{L}$, ossia che per ogni $A \in \mathcal{V} \oplus \mathcal{U}$ l'intorno $\mathcal{O}_A$ interseca L. Dato che $\{n \in \mathbb{N} : A - n \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{V}$, esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $A - n \in \mathcal{U}$. Ma $\mathcal{U} \in \overline{L}$, e quindi esiste $\mathcal{W} \in \mathcal{O}_{A-n} \cap L$. Sia $\mathcal{Z} = \sqcup_n \oplus \mathcal{W}$. Allora, dato che $\mathcal{W} \in L$, anche $\mathcal{Z} \in L$. Mostriamo che $\mathcal{Z} \in \mathcal{O}_A$: dato che $\{n\} \in \sqcup_n$ e $A - n \in \mathcal{O}_{A-n}$, abbiamo che $\{n\} + (A - n) \in \mathcal{Z}$, e dato che $\{n\} + (A - n) \subseteq A$, abbiamo che $A \in \mathcal{Z}$ ossia $\mathcal{Z} \in \mathcal{O}_A$. Ne consegue che $\mathcal{Z} \in \mathcal{O}_A \cap L$ che è quindi non vuoto. □

Esercizio 16.3. Sia $(X, *)$ un semigruppo topologico destro, e sia I un iedale sinistro, e J un ideale sinistro minimale. Allora per ogni $y \in J$ si ha $J = I * y$.

Dimostrazione. Sia $y \in J$. Dato che J è un ideale sinistro, si ha $I * y \subseteq J$. D'altra parte, $I * y$ è un ideale sinistro: infatti, se $x \in X$ e $t \in I * y$, allora $t = p * y$ per un certo $p \in I$, da cui che essendo I un ideale sinistro abbiamo $x * p \in I$. Allora $x * t = x * (p * y) = (x * p) \in I * y$. Dato che J è minimale, si deve avere $I * y = J$. □

17 Esercizi 5-5-2015

No esercizi.

18 Esercizi 11-5-2015

Esercizio 18.1. Sia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(I)$ chiusa per soprainsiemi. Dimostrare che $\mathcal{F} = \mathcal{F}^*$ non implica in generale $\mathcal{F}$ ultrafiltro.

Dimostrazione. Prendiamo I con almeno 3 elementi a, b, c. Definiamo $\mathcal{F}$ come la famiglia dei sottoinsiemi di I che contengono almeno due elementi di $\{a, b, c\}$. $\mathcal{F}$ è chiusa per soprainsiemi non è un ultrafiltro su I, in quanto ad esempio $\{a, b\}, \{a, c\} \in \mathcal{F}$ ma $\{a\} \notin \mathcal{F}$. Ora, se $X \in \mathcal{F}^*$, allora X deve intersecare $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$ e quindi non può contenere meno di due elementi di $\{a, b, c\}$, dunque $X \in \mathcal{F}$. D'altra parte, sia $X \notin \mathcal{F}^*$. Allora esiste un insieme $F \in \mathcal{F}$ tale che $X \cap F = \emptyset$: dato che $F \in \mathcal{F}$, F contiene almeno due elementi di $\{a, b, c\}$, diciamo WLOG a e b: allora X non può estendere nessuno tra $\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}$ perchè tutti intersecano $\{a, b\}$ e quindi F; ne consegue che $X \notin \mathcal{F}$. □

Esercizio 18.2. Dato $\mathcal{F}$ un filtro su $\mathbb{N}$, definiamo $C_{\mathcal{F}} = \bigcap_{A \in \mathcal{F}} \mathcal{O}_A$. Data una famiglia $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ chiusa per soprainsiemi e regolare per partizioni, definiamo $C_{\mathcal{P}} = \bigcap_{A \in \mathcal{P}^*} \mathcal{O}_A$. Dato un chiuso C di $\beta\mathbb{N}$, definiamo $\mathcal{F}_C = \bigcap_{\mathcal{U} \in C} \mathcal{U}$ e $\mathcal{P}_C = \bigcup_{\mathcal{U} \in C} \mathcal{U}$. Dimostrare che:

1. $\mathcal{F}_{C_{\mathcal{F}}} = \mathcal{F}$;
2. $C_{\mathcal{F}_C} = C$;
3. $\mathcal{P}_{C_{\mathcal{P}}} = \mathcal{P}$;
4. $C_{\mathcal{P}_C} = C$.

Dimostrazione. Innanzitutto, perchè tutto abbia senso, osserviamo che: $C_{\mathcal{F}}$ e $C_{\mathcal{P}}$ sono intersezioni di $\mathcal{O}_A$ che sono chiusi, e quindi sono chiusi; dato che l'intersezione di filtri su $\mathbb{N}$ è un filtro su $\mathbb{N}$, anche $\mathcal{F}_C$ è un filtro su $\mathbb{N}$; infine, dato che un'unione di ultrafiltri su $\mathbb{N}$ è banalmente regolare per partizioni e chiusa per soprainsieme su $\mathbb{N}$, allora $\mathcal{P}_C$ è regolare per partizioni e chiusa per soprainsieme su $\mathbb{N}$.

1. Se $X \in \mathcal{F}$, allora sia $\mathcal{U} \in C_{\mathcal{F}}$: allora $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_A$ per ogni $A \in \mathcal{F}$, e quindi in particolare $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_X$, da cui che $X \in \mathcal{U}$; per la generalità di $\mathcal{U}$, abbiamo $X \in \mathcal{F}_{C_{\mathcal{F}}}$. Se $X \in \mathcal{F}_{C_{\mathcal{F}}}$, allora $X \in \mathcal{U}$ per ogni $\mathcal{U} \in C_{\mathcal{F}}$, ossia $X \in \mathcal{U}$ per ogni $\mathcal{U} \supseteq \mathcal{F}$ ultrafiltro, ossia $X \in \mathcal{F}$.

2. Se C è un chiuso di $\beta\mathbb{N}$, allora un $\mathcal{U} \in C$ contiene tutti gli elementi di $\mathcal{F}_C$: infatti, $A \in \mathcal{F}_C$ implica che A sta in tutti gli ultrafiltri contenuti in C, e quindi $A \in \mathcal{U}$. Ne consegue che $\mathcal{U} \in C_{\mathcal{F}_C}$. Viceversa, se $\mathcal{U} \notin C$, allora essendo C chiuso esiste $A \in \mathcal{U}$ tale che $\mathcal{O}_A \cap C = \emptyset$: allora $A^c \in \mathcal{F}_C$, in quanto per ogni $\mathcal{V} \in C$ si ha $\mathcal{V} \notin \mathcal{O}_A$; ne consegue che $\mathcal{U} \not\supseteq \mathcal{F}_C$ e quindi $\mathcal{U} \notin C_{\mathcal{F}_C}$.

3. Sia $\mathcal{F} = \mathcal{P}^*$. Allora $\mathcal{F}_{C_\mathcal{F}} = \mathcal{F}$. Inoltre $\mathcal{F}^* = \mathcal{P}^{**} = \mathcal{P}$. Dimostriamo che $(\mathcal{F}_{C_\mathcal{F}})^* = \mathcal{P}_{C_\mathcal{P}}$. Si ha

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}_{C_\mathcal{F}})^* &= \left(\bigcap_{\mathcal{U}\in C_\mathcal{F}} \mathcal{U}\right)^* \\
&= \bigcup_{\mathcal{U}\in C_\mathcal{F}} \mathcal{U} \\
&= \bigcup_{\mathcal{U}\supseteq \mathcal{F}} \mathcal{U} \\
&= \bigcup_{\mathcal{U}\subseteq \mathcal{P}} \mathcal{U} \\
&= \mathcal{P}_{C_\mathcal{P}}.
\end{aligned}$$

4. Sia $\mathcal{F} = \mathcal{P}^*$. Allora $C_\mathcal{F} = \bigcap_{A\in\mathcal{F}} \mathcal{O}_A = \bigcap_{A\in\mathcal{P}^*} \mathcal{O}_A = C_\mathcal{P}$, e quindi dato che $\mathcal{P}_C^* = \mathcal{F}_C$, abbiamo che $C_{\mathcal{P}_C} = C_{\mathcal{F}_C} = C$.

□

Esercizio 18.3.

1. La famiglia $\Delta = \{\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N} : (\forall A \in \mathcal{U})\,(BD\,(A) > 0)\}$ è un ideale bilatero in $(\beta\mathbb{N}, \oplus)$.
2. La famiglia vdW $= \{\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N} : (\forall A \in \mathcal{U})\,(A$ è AP-rich$)\}$ è un ideale bilatero in $(\beta\mathbb{N}, \oplus)$.
3. La famiglia Δ è un ideale sinistro in $(\beta\mathbb{N}, \odot)$.
4. La famiglia $\overline{d} = \left\{\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N} : (\forall A \in \mathcal{U})\left(\overline{d}\,(A) > 0\right)\right\}$ è un ideale sinistro di $(\beta\mathbb{N}, \oplus)$.

Dimostrazione. Prima dimostriamo un lemma.

Lemma. *Se $\mathcal{F}$ è una famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ tali che se $A \leq_{fe} B$ e $A \in \mathcal{F}$ allora $B \in \mathcal{F}$, allora la famiglia F degli ultrafiltri che sono sottoinsiemi di $\mathcal{F}$ è un ideale bilatero di $(\beta\mathbb{N}, \oplus)$.*

Dimostrazione. Fissiamo un modello nonstandard ${}^*\mathbb{R}$ in cui ogni ultrafiltro su $\mathbb{N}$ si esprime nella forma $\mathcal{U}_\alpha = \{A \subseteq \mathbb{N} : \alpha \in {}^*A\}$ per un certo $\alpha \in^* \mathbb{N}$. Siano $\mathcal{U} \in F$ e $\mathcal{V} \in \beta\mathbb{N}$. Se $A \in \mathcal{V} \oplus \mathcal{U}$, allora $\{n \in \mathbb{N} : A - n \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{V}$ e quindi in particolare esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $A - n \in \mathcal{U}$. Dato che $A - n \leq_{fe} A$ e $A - n \in \mathcal{F}$, allora anche $A \in \mathcal{F}$: per la generalità di A, si ha che $\mathcal{V} \oplus \mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$ e quindi $\mathcal{V} \oplus \mathcal{U} \in F$. Per la generalità di $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$, abbiamo che F è un ideale sinistro. Ora, sia $\alpha \in {}^*\mathbb{N}$ tale che $\mathcal{V} = \mathcal{U}_\alpha$. Allora, se $A \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}_\alpha$, allora l'insieme $A_\alpha = \{n \in \mathbb{N} : A - n \in \mathcal{U}_\alpha\} = \{n \in \mathbb{N} : \alpha + n \in {}^*A\}$ sta in $\mathcal{U}$. Ora, $A_\alpha + \alpha \subseteq {}^*A$, e quindi $A_\alpha \leq_{fe} A$: allora, dato che $A_\alpha \in \mathcal{F}$, anche $A \in \mathcal{F}$, e quindi per la generalità di A abbiamo $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V} \subseteq \mathcal{F}$ da cui $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V} \in F$, e quindi F è un ideale destro. □

1. Deriva dal lemma ricordando che la proprietà "avere densità di Banach positiva" è stabile rispetto a $\leq_{fe}$.
2. Deriva dal lemma ricordando che la proprietà "essere AP-rich" è stabile rispetto a $\leq_{fe}$.

3. Sia $\mathcal{U} \in \Delta$ e sia $\mathcal{V} \in \beta\mathbb{N}$. Se $A \in \mathcal{V} \odot \mathcal{U}$, allora $\{n \in \mathbb{N} : A/n \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{V}$, e quindi esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $A/n \in \mathcal{U}$. Allora $BD(A/n) > 0$, e quindi anche $BD(n \cdot (A/n)) > 0$. Ma $n \cdot (A/n) \subseteq A$, e quindi anche $BD(A) > 0$. Per la generalità di A abbiamo $\mathcal{V} \odot \mathcal{U} \in \Delta$ e quindi Δ è un ideale sinistro di $(\beta\mathbb{N}, \odot)$.

4. Siano $A \subseteq \mathbb{N}$ e $k \in \mathbb{N}$. Osserviamo allora che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $|(A-k) \cap [1,n]| = |A \cap [k+1, k+n]| \leq |A \cap [1, k+n]|$, e quindi anche nel modello nonstandard vale che per ogni $\nu \in {}^*\mathbb{N}$ si ha ${}^*|{}^*(A-k) \cap [1,\nu]| \leq {}^*|{}^*A \cap [1, k+\nu]|$. Ora, ricordando la caratterizzazione non standard della densità asintotica superiore, abbiamo

$$\begin{aligned} \overline{d}(A-k) &= \max\left\{\mathrm{st}\left(\frac{{}^*|{}^*(A-k) \cap [1,\nu]|}{\nu}\right) : \nu \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}\right\} \\ &= \mathrm{st}\left(\frac{{}^*(A-k) \cap [1,\mu]}{\mu}\right) \end{aligned}$$

per un certo $\mu \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$. Allora osserviamo che

$$\begin{aligned} \frac{{}^*|{}^*(A-k) \cap [1,\mu]|}{\mu} &\leq \frac{{}^*|{}^*A \cap [1, k+\mu]|}{\mu} \\ &= \frac{{}^*|{}^*A \cap [1, k+\mu]|}{k+\mu}\frac{k+\mu}{\mu} \\ &\sim \frac{{}^*|{}^*A \cap [1, k+\nu]|}{k+\nu} \end{aligned}$$

in quanto $\frac{k+\mu}{\mu} = 1 + \frac{k}{\mu} \sim 1$ essendo k finito e μ infinito. Allora, passando alle parti standard, abbiamo che $\overline{d}(A-k) \leq \overline{d}(A)$.
Ora, sia $\mathcal{U} \in \overline{d}$ e sia $\mathcal{V} \in \beta\mathbb{N}$. Sia $A \in \mathcal{V} \oplus \mathcal{U}$. Allora $\{n \in \mathbb{N} : A - n \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{V}$, e quindi esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $A - k \in \mathcal{U}$, da cui che $\overline{d}(A-k) > 0$. Ma allora $0 < \overline{d}(A-k) \leq \overline{d}(A)$, e quindi $\overline{d}(A) > 0$: per la generalità di A si ha che $\mathcal{V} \oplus \mathcal{U} \in \overline{d}$, e quindi $\overline{d}$ è un ideale sinistro di $(\beta\mathbb{N}, \oplus)$.

□

19 Esercizi 12-5-2015

Esercizio 19.1. Siano X, Y spazi topologici. Fissiamo un universo nonstandard $\langle V_\omega(Z), V_\omega({}^*Z), {}^*\rangle$ tale che $X, Y \in V_\omega(Z) \backslash Z$. Sia $x \in X$. La *monade* di x è l'insieme

$$\mu(x) = \bigcap_{U \text{ intorno di } x} {}^*U.$$

Dato $\xi \in {}^*X$, diremo che $\xi \approx x$ se e solo se $\xi \in \mu(x)$. Dimostrare che:

1. $A \subseteq X$ è aperto $\iff$ per ogni $x \in A$ si ha $\mu(x) \subseteq {}^*A$.

2. $A \subseteq X$ è chiuso $\iff$ per ogni $x \in X$ si ha che se $\mu(x) \cap {}^*A \neq \emptyset$ allora $x \in A$.

3. Una mappa $f : X \to Y$ è continua in $x \in X$ $\iff$ per ogni $\xi \in \mu(x)$ si ha ${}^*f(\xi) \approx f(x)$.

4. Supponiamo che il modello nonstandard scelto abbia il κ-enlargement per κ cardinale sufficientemente grande. Allora X è compatto se e solo se per ogni $\xi \in {}^*X$ esiste $x \in X$ tale che $\xi \approx x$.

Dimostrazione.

1.

2. Dimostro i primi due punti insieme. Sia $A \subseteq X$, e sia x un punto interno ad A: allora A è un intorno di x, e quindi $\mu(x) \subseteq {}^*A$ per ogni $x \in X$. Sia x di frontiera per A: allora $x \notin \operatorname{int}(A)$ e $x \notin \operatorname{est}(A) = \operatorname{int}(X \backslash A)$, e quindi per quanto appena dimostrato abbiamo $\mu(x) \nsubseteq {}^*A$ e $\mu(x) \nsubseteq {}^*(X \backslash A)$, da cui che, essendo ${}^*(X \backslash A) = {}^*X \backslash {}^*A$, abbiamo $\mu(x) \cap {}^*A \neq \emptyset$ e $\mu(x) \cap {}^*(X \backslash A) \neq \emptyset$. Analogamente, se $\mu(x)$ interseca sia ${}^*A$ sia ${}^*(X \backslash A)$, allora x non può essere interno ad A nè a $X \backslash A$, e quindi x è di frontiera per A. Ne consegue che se $\mu(x) \subseteq {}^*A$ per un certo $x \in X$, allora x è un punto interno di A. Da queste caratterizzazioni segue immediatamente che A è aperto $\iff$ ogni punto di A è interno ad A $\iff$ $(\forall x \in A)(\mu(x) \subseteq {}^*A)$, e che A è chiuso $\iff$ A contiene la sua frontiera $\iff$ $(\forall x \in X)(\mu(x) \cap {}^*A \neq \emptyset \Rightarrow x \in A)$.

3. Sia $f : X \to Y$ continua in $x \in X$. Sia V intorno aperto di $f(x)$: allora esiste un intorno aperto U di x tale che $f(U) \subseteq V$. Ora, se $\xi \in \mu(x)$, allora per quanto visto prima abbiamo $\xi \in {}^*U$, e quindi dato che ${}^*f({}^*U) \subseteq {}^*V$ per transfer, abbiamo che ${}^*f(\xi) \in {}^*V$. Per la generalità di V, abbiamo che ${}^*f(\xi) \in \mu(f(x))$. Viceversa, supponiamo che per ogni $\xi \in \mu(x)$ si abbia ${}^*f(\xi) \in \mu(f(x))$. Sia V un intorno aperto di $f(x)$. Dimostriamo che $x \in \operatorname{int}\left(f^{-1}(V)\right)$. Dato che ${}^*f(\mu(x)) \subseteq \mu(f(x)) \subseteq {}^*V$, abbiamo che $\mu(x) \subseteq ({}^*f)^{-1}({}^*V) = {}^*\left(f^{-1}(V)\right)$, e quindi $x \in \operatorname{int}\left(f^{-1}(V)\right)$.

4. $(\Leftarrow)$ Sia X non compatto. Allora esiste un ricoprimento aperto $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ che non ha sottoricoprimenti finiti. Allora $\{X \backslash U_i : i \in I\}$ ha la FIP, e quindi per enlargement esiste $\xi \in \bigcap_{i \in I} ({}^*X \backslash {}^*U_i)$. Allora, per ogni $x \in X$, $\xi \notin \mu(x)$: infatti, se così fosse, allora preso U_i tale che $x \in U_i$, avremmo $\xi \in {}^*U_i$, assurdo.
$(\Rightarrow)$ Per assurdo sia $\xi \in {}^*X$ tale che $\xi \notin \mu(x)$ per ogni $x \in X$. Allora per ogni $x \in X$ esiste U_x intorno aperto di x tale che $\xi \notin {}^*U_x$. Ora, chiaramente la famiglia $\{U_x\}_{x \in X}$ è un ricoprimento aperto di X, e quindi essendo X compatto esiste un sottoricoprimento finito $U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_n}$. Allora $\xi \in {}^*U_{x_1} \cup \cdots \cup {}^*U_{x_n}$, assurdo.

□

Esercizio 19.2. Sia (X, T) un sistema dinamico topologico. Dimostrare che $x \in X$ è *ricorrente non periodico* (ossia $x \in \overline{\operatorname{orb}(x)}$ e $\operatorname{orb}(x)$ è infinita) se e solo se per ogni intorno U di x l'insieme $\operatorname{orb}(x) \cap U$ è infinito.

Dimostrazione. La direzione $\Leftarrow$ è ovvia. Per dimostrare $\Rightarrow$ mi basta dimostrare che se $x \in X$ è ricorrente non periodico, allora anche Tx lo è. Infatti, in questo modo si verifica induttivamente che $T^n x$ è ricorrente non periodico per ogni $n \in \mathbb{N}$, e quindi preso U intorno di x si ha che esiste n tale che $T^n x \in U$, e quindi U è intorno di $T^n x$, da cui che esiste m tale che $T^{m+n} x \in U$ eccetera. Dimostriamo che se x è ricorrente non periodico allora anche Tx lo è. Chiaramente anche l'orbita di Tx è infinita. Ora, si ha $\operatorname{orb}(Tx) = \operatorname{orb}(x) \cap \{Tx\}^c$, e quindi $\overline{\operatorname{orb}(Tx)} = \overline{\operatorname{orb}(x)} \cap \overline{\{Tx\}^c}$. Ovviamente $Tx \in \overline{\operatorname{orb}(x)}$, dunque $Tx \in \overline{\operatorname{orb}(Tx)}$ se e solo se $Tx \in \overline{\{Tx\}^c}$, ossia se e solo se

$\{Tx\}$ non è aperto. Se per assurdo $\{Tx\}$ fosse aperto, allora $T^{-1}(\{Tx\}) = U$ sarebbe aperto per continuità di T. Ma allora U è un intorno aperto di x, e quindi esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $T^n x \in U$. Questo vuol dire che $T^{n+1}x = Tx$, assurdo in quanto $\text{orb}(x)$ è infinita. $\square$

Esercizio 19.3. Sia (X, T) un sistema dinamico topologico. Fissiamo un universo nonstandard $\langle V_\omega(Y), V_\omega({}^*Y), {}^*\rangle$ con il κ-enlargement per κ cardinale sufficientemente grande, e tale che $\mathbb{N}, X \subseteq Y$. Dimostrare che $x \in X$ è ricorrente $\iff$ esiste $\nu \in {}^*\mathbb{N}$ tale che $T^\nu x \approx x$.

Dimostrazione. Dato U intorno di x, definiamo $A_U = \{n \in \mathbb{N} : T^n x \in U\}$. Ora, x è ricorrente se e solo se per ogni U intorno di x esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $n \in A_U$, e questo è vero se e solo se la famiglia $\mathcal{F} = \{A_U : U \,\text{intorno di}\, x\}$ ha la FIP: infatti, $A_{U_1} \cap \cdots \cap A_{U_k} = A_{U_1 \cap \cdots \cap U_k}$. Ma $\mathcal{F}$ ha la FIP se e solo se esiste $\nu \in \bigcap_{U \,\text{intorno di}\, x} {}^*A_U$: infatti, se $\mathcal{F}$ ha la FIP, allora per enlargement la precedente intersezione è non vuota; viceversa, se la precedente intersezione è non vuota allora in particolare ${}^*A_{U_1} \cap \cdots \cap {}^*A_{U_k} \neq \emptyset$, e quindi $A_{U_1} \cap \cdots \cap A_{U_k} \neq \emptyset$ da cui che $\mathcal{F}$ ha la FIP. Per concludere, se $\nu \in \bigcap_{U \,\text{intorno di}\, x} {}^*A_U$ allora $T^\nu x \in \mu(x)$: infatti nel modello standard vale $(\forall n \in \mathbb{N})(n \in A_U \leftrightarrow T^n x \in U)$, e quindi nel modello nonstandard vale $(\forall \nu \in {}^*\mathbb{N})(\nu \in {}^*A_U \leftrightarrow T^\nu x \in {}^*U)$. $\square$

Esercizio 19.4. Dimostrare il teorema di Tychonoff.

Dimostrazione. Sia I un insieme infinito, e siano $\{X_i\}_{i \in I}$ spazi topologici compatti. Dobbiamo dimostrare che $X = \prod_{i \in I} X_i$ con la topologia prodotto è compatto. WLOG supponiamo che I e gli X_i siano a due a due disgiunti, definiamo

$$Y = I \sqcup \left(\bigsqcup_{i \in I} X_i \right)$$

e fissiamo un universo nonstandard $\langle V_\omega(Y), V_\omega({}^*Y), {}^*\rangle$ con la proprietà del κ-enlargement per κ cardinale sufficientemente grande. Chiaramente sia X che gli X_i sono elementi di $V_\omega(Y) \setminus Y$, quindi vale la caratterizzazione precedente di compattezza. Dato che I contiene solo atomi, possiamo pensare I dentro ${}^*I$. Fissiamo la funzione $\sigma : I \to \mathcal{P}\left(\bigcup_{i \in I} X_i\right)$ tale che $\sigma(i) = X_i$. Allora X è l'insieme delle funzioni $f : I \to \bigcup_{i \in I} X_i$ tali che per ogni $i \in I$ si abbia $f(i) \in \sigma(i)$, dunque ${}^*X$ è l'insieme delle funzioni *interne* $\psi : {}^*I \to {}^*\left(\bigcup_{i \in I} X_i\right)$ tali che, per ogni $\nu \in {}^*I$, si abbia $\psi(\nu) \in {}^*\sigma(\nu)$.
Sia ora $\varphi \in X$. Allora, dato $i \in I$, *non* è detto che $\varphi(i) \in X_i$, ma sicuramente $\varphi(i) \in {}^*X_i$ in quanto $({}^*\sigma)(i) = {}^*(\sigma(i))$ per ogni $i \in I$; tuttavia, dato che ogni X_i è compatto, esiste un $f_i \in X_i$ "vicino" a $\varphi(i)$, ossia tale che $\varphi(i) \in \mu(f_i)$. Definiamo quindi $f \in X$ tale che $f(i) = f_i$, e dimostriamo che $\varphi \in \mu(f)$. Sia $U = \prod_{i \in I} U_i$ un intorno di base di f, ossia per ogni $i \in I$ U_i è un intorno aperto di f_i e $U_i = X_i$ per tutti gli $i \in I \setminus F$, dove F è un sottoinsieme finito di I: verifichiamo che $\varphi \in {}^*U$. Sia $\tau : I \to \mathcal{P}\left(\bigcup_{i \in I} X_i\right)$ tale che $\tau(i) = U_i$ per ogni $i \in I$: dato che U è l'insieme delle $g \in X$ tali che $g(i) \in \tau(i)$ per ogni $i \in F$, allora ${}^*U$ è l'insieme delle $\psi \in {}^*X$ tali che $\psi(i) \in {}^*\tau(i)$ per ogni $i \in {}^*F$; ma ${}^*F = F$ in quanto F è finito: ne consegue che $\psi(i) \in {}^*\tau(i) = {}^*U_i$ per ogni $i \in F$. Ma allora $\varphi \in {}^*U$: infatti, per ogni $i \in I$ abbiamo che $\varphi(i) \in {}^*U_i$ in quanto U_i è un intorno aperto di f_i e $\varphi(i) \in \mu(f_i)$. Ne consegue la tesi. $\square$

20 Esercizi 15-5-2015

21 Esercizi 18-5-2015

Esercizio 21.1. Sia (X,T) un sistema dinamico topologico (X compatto e T_2). Per ogni $\nu \in {}^*\mathbb{N}$, definiamo

$$\begin{array}{rcl} T_\nu : X & \to & X \\ x & \mapsto & \mathrm{st}\left(T^\nu x\right). \end{array}$$

1. $T_\nu (x) = \mathfrak{U}_\nu \lim_n T^n (x)$.
2. $T_\mu (T_\nu x) = \mathfrak{U}_\mu \oplus \mathfrak{U}_\nu \lim_n T^n x$

Dimostrazione. Innanzitutto cosa intendiamo per parte standard? Dato che lo spazio è T_2, si verifica facilmente che per ogni $\alpha \in {}^*X$ esiste un *unico* $a \in X$ tale che $\alpha \in \mu(a)$: allora poniamo $\mathrm{st}(\alpha) = a$. Inoltre, dato che lo spazio è compatto e T_2, per ogni ultrafiltro $\mathcal{U}$ gli $\mathcal{U}$-limiti di successioni esistono e sono unici.

1. Sia A un intorno aperto di $\mathfrak{U}_\nu \lim_n T^n x$. Allora, per definizione, $\{n \in \mathbb{N} : T^n x \in A\} \in \mathfrak{U}_\nu$, ossia $\nu \in {}^*\{n \in \mathbb{N} : T^n x \in A\}$, ossia $T^\nu x \in {}^*A$. Dato che questo accade per ogni A intorno del limite, si ha che $T^\nu x$ è contenuto nella monade del limite, e questo conclude.
2. Utilizzando il fatto che $\mathcal{U} \lim_m (\mathcal{V} \lim_n (x_{n+m})) = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V} \lim_k x_k$ e utilizzando il fatto che le mappe continue commutano con gli $\mathcal{U}$-limiti, abbiamo che

$$\begin{aligned} T_\mu (T_\nu x) &= \mathfrak{U}_\mu \lim_m T^m (T_\nu x) \\ &= \mathfrak{U}_\mu \lim_m T^m \left(\mathfrak{U}_\nu \lim_n T^n x\right) \\ &= \mathfrak{U}_\mu \lim_m \left(\mathfrak{U}_\nu \lim_n \left(T^{n+m} x\right)\right) \\ &= \mathfrak{U}_\mu \oplus \mathfrak{U}_\nu \lim_k T^k x. \end{aligned}$$

□

22 Esercizi 19-5-2015

Esercizio 22.1. Consideriamo il sistema dinamico $({}^*\mathbb{N}, {}^*S)$ e sia $\gamma \in {}^*\mathbb{N}$. Sono equivalenti:

1. γ è ricorrente;
2. esiste $\mu \in {}^*\mathbb{N} \backslash \mathbb{N}$ tale che $\mu + {}^*\gamma$ sta nella monade di γ;
3. esiste $\mathcal{V}$ nonprincipale tale che $\mathcal{V} \oplus \mathfrak{U}_\gamma = \mathfrak{U}_\gamma$.

Dimostrazione. (Che ha senso in modelli nonstandard con * iterate) Innanzitutto: dato $\gamma \in {}^*\mathbb{N}$, chi è la monade di γ? Dato che la famiglia degli intorni di γ è $\{{}^*A : A \in \mathfrak{U}_\gamma\}$, la monade di γ è

$$\bigcap_{A \in \mathfrak{U}_\gamma} {}^{**}A.$$

Osserviamo inoltre che se γ è ricorrente, allora γ non è naturale: infatti, se $\gamma \in \mathbb{N}$, allora $\{\gamma\}$ è un intorno di γ, e quindi γ non può essere ricorrente.

1. $(1 \Rightarrow 2)$ Sia γ ricorrente. Dato che $\mathfrak{U}_\gamma$ contiene esattamente gli intorni aperti di γ, abbiamo che per ogni $A \in \mathfrak{U}_\gamma$ si ha $\{n \in \mathbb{N} : \gamma + n \in {}^*A\} = A_\gamma \neq \emptyset$. Osserviamo che la famiglia $\{A_\gamma : A \in \mathfrak{U}_\gamma\}$ ha la FIP: infatti, $A_\gamma \cap B_\gamma = (A \cap B)_\gamma$. Allora, per enlargement, esiste

$$\mu \in \bigcap_{A \in \mathfrak{U}_\gamma} {}^*A_\gamma.$$

   Osserviamo che μ non può essere naturale: infatti, se avessimo $\mu = n \in \mathbb{N}$, allora avremmo che $n \in A_\gamma$ per ogni $A \in \mathfrak{U}_\gamma$, ossia $\gamma + n \in {}^*A$ per ogni $A \in \mathfrak{U}_\gamma$, ossia $\mathfrak{U}_\gamma = \mathfrak{U}_{\gamma+n} = \mathfrak{U}_\gamma \oplus \mathfrak{U}_n$: ma allora, se $A \in \mathfrak{U}_\gamma$, allora $\gamma, \gamma+n, \gamma+2n, ... \in {}^*A$, ossia ${}^*A$ contiene una progressione aritmetica infinita; ne consegue che per transfer anche A contiene una progressione aritmetica infinita, e quindi è sindetico; per la generalità di A, ogni elemento di $\mathfrak{U}_\gamma$ è sindetico. Ma questo è assurdo, in quanto non esistono ultrafiltri tali che ogni loro elemento è sindetico (infatti esistono insiemi spessi con complementare spesso, ossia non sindetici con complementare non sindetico).
   Ora, dato che $A_\gamma = \{n \in \mathbb{N} : \gamma + n \in {}^*A\}$, abbiamo che ${}^*A_\gamma = \{\nu \in {}^*\mathbb{N} : {}^*\gamma + \nu \in {}^{**}A\}$: ne consegue che per ogni $A \in \mathfrak{U}_\gamma$ si ha che $\mu + {}^*\gamma \in {}^{**}A$, e quindi per la generalità di A abbiamo che $\mu + {}^*\gamma$ sta nella monade di γ.

2. $(2 \Rightarrow 3)$ Prendiamo il μ della dimostrazione precedente: allora per ogni $A \in \mathfrak{U}_\gamma$ si ha che $\mu + {}^*\gamma \in {}^{**}A$. Questo vuol dire che $\mathfrak{U}_\gamma = \mathfrak{U}_{\mu + {}^*\gamma} = \mathfrak{U}_\mu \oplus \mathfrak{U}_\gamma$.

3. $(3 \Rightarrow 1)$ Chiaramente deve essere $\gamma \in {}^*\mathbb{N} \backslash \mathbb{N}$. Sia ora $\mathcal{V} = \mathfrak{U}_\mu$ per un certo $\mu \in {}^*\mathbb{N} \backslash \mathbb{N}$. Sia $A \in \mathfrak{U}_\gamma$. Se per assurdo avessimo $\neg (\exists n \in \mathbb{N}) (\gamma + n \in {}^*A)$, allora per transfer avremmo $\neg (\exists \nu \in {}^*\mathbb{N}) ({}^*\gamma + \nu \in {}^{**}A)$; ma questo è falso: infatti dato che $\mathfrak{U}_\mu \oplus \mathfrak{U}_\gamma = \mathfrak{U}_\gamma$, abbiamo che $\mu + {}^*\gamma \in {}^{**}A$.

□