11ª LEZIONE | ESERCIZIO

$$\exists W \text{ t.c. } W \oplus \mathcal{U} = \mathcal{U} \Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{U}\ \exists n : A - n \in \mathcal{U}$$

($\Rightarrow$) fisso $A \in \mathcal{U} \Rightarrow A \in W \oplus \mathcal{U}$ cioé $\{n \mid A - n \in \mathcal{U}\} \in W$

ma $\emptyset \notin W \Rightarrow \exists n : A - n \in \mathcal{U}$

($\Leftarrow$) Sia $\forall A \in \mathcal{U}$ c'é un n : $A - n \in \mathcal{U}$.
Fisso A e trovo n tale che $A - n \in \mathcal{U}$.
Al variare di $A \in \mathcal{U}$ chiamo W il filtro generato da $\{n \mid A - n \in \mathcal{U}\}$: • $\emptyset \notin W$ poiché se $A \in W$ (cioé $\exists \bar{A} \in \mathcal{U}$ t.c. ...) ho che $\bar{A} \in \mathcal{U}$ t.c. $A = \{n \mid \bar{A} - n \in \mathcal{U}\} \neq \emptyset$.

• Se $A, B \in W$ ho i corrispondenti $\bar{A}, \bar{B} \in \mathcal{U}$ ($\bar{A} \cap \bar{B} \in \mathcal{U} \Rightarrow \exists n : \bar{A} \cap \bar{B} - n \in \mathcal{U}$) tali che $\{n \mid \bar{A} \cap \bar{B} - n \in \mathcal{U}\} \neq \emptyset$ cioé $A \cap B \in W$

• $A \in W$ e $B \supset A$. Poiché $A \in W$ ho $\bar{A} \in \mathcal{U}$ t.c. $\{s \mid s + n \in \bar{A}\} \in \mathcal{U}$
Se oltre agli $n \in A$ prendo altri elementi, ad esempio $B \setminus A$, ho che
$\{s \mid s + n \text{ con } n \in B \text{ ed } s \in \bar{A} - A\} \supseteq \{s \mid s + n \in \bar{A}\} \in \mathcal{U} \Rightarrow B \in W$

• $A \in \mathcal{U} \Rightarrow A \in W \oplus \mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{U} \subset W \oplus \mathcal{U} \Rightarrow W$ ultrafiltro.

LEZIONE 11 ESERCIZIO

$$\mathcal{U} \text{ idempotente} \Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{U}\ \exists a \in A : A - a \in \mathcal{U}$$

($\Rightarrow$) $\mathcal{U} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}$. Sia $A \in \mathcal{U} \Rightarrow A \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}$

cioé $\underbrace{\{n \mid A - n \in \mathcal{U}\}}_{\neq \emptyset} \in \mathcal{U}$

Per il Teorema di Hindman, data $\mathbb{N} = \underset{n \in \mathcal{U}}{C_1} \sqcup \underset{n \notin \mathcal{U}}{C_2}$

trovo X infinito t.c. $FS(X)$ sia monocromatico.

Per assurdo $\{n \mid A-n \in \mathcal{U}\}$ abbia tutti gli elementi $\notin A$.

Poiché $\mathbb{N} = (A) \sqcup (\mathbb{N} \setminus A)$.

Se $FS(X) \subset A$ ho subito un assurdo.

Se $FS(X) \subset \mathbb{N} \setminus A$ avrei che $\{n \mid \{a+n \mid a \in A\} \in \mathcal{U}\}$ sono in $\mathbb{N} \setminus A$

$\{n \mid A-n \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{U}$ e anche $A \in \mathcal{U} \Rightarrow \mathbb{N} \setminus A \notin \mathcal{U}$

$\Rightarrow \{n \mid A-n \in \mathcal{U}\} \notin \mathcal{U}$ ↯

$\Leftarrow$ $\forall A \in \mathcal{U} \quad \exists a \in A$ t.c. $A-a \in \mathcal{U}$

$\Rightarrow$ fisso A, trovo $a \in A$ ($\Rightarrow a \in \mathbb{N}$) t.c. $A-a \in \mathcal{U}$

$\Rightarrow \{a \mid A-a \in \mathcal{U}\} \neq \emptyset$

$\Rightarrow \exists W$ ultrafiltro t.c. $\{a \mid A-a \in \mathcal{U}\} \in W$

e $\forall A \in \mathcal{U} \quad \underbrace{\{a \mid A-a \in \mathcal{U}\}}_{B_A} \in W$

$\forall A$ ho che $B_A \cap A \neq \emptyset$. Ma $B_A \cap A \in W \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \{a \in B_A \cap A \mid A-a \in \mathcal{U}\}$

ok $\Rightarrow B_A \cap A \in W$

ma $B_A \cap A \subset A \Rightarrow A \in W$

$\Rightarrow$ ho che $W = \mathcal{U}$.