LEZIONE 10 - ESERCIZIO

Sia $\mathcal{U}$ ultrafiltro NON principale, TFAE:

(1) $\mathcal{U}$ é selettivo : $\forall\ \mathbb{N} = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k$ con $A_k \notin \mathcal{U}$ allora $\exists X \in \mathcal{U}$ t.c. $\forall k\ |X \cap A_k| = 1$

(2) $\forall f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ f é $\mathcal{U}$ q.o. costante, oppure é $\mathcal{U}$-q.o. iniettiva.

(3) $\forall f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\exists g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ non decrescente t.c. $f \equiv_{\mathcal{U}} g$

(4) $\mathcal{U}$ é R-K - minimale in $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ (fra i non principali)
cioé se $\mathcal{V}$ é non principale t.c. $\mathcal{V} \leq \mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{U} \cong \mathcal{V}$

(5) $\mathcal{U}$ é di Ramsey, cioé $[\mathbb{N}]^2 = C_1 \sqcup \dots \sqcup C_n \Rightarrow \exists A \in \mathcal{U} : [A]^2 \subseteq C_i$

(6) Se $\varepsilon \in {}^*\mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$ infinitesimo $\Rightarrow \exists f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ monotona infinitesima t.c. $[f] = \varepsilon$

$\boxed{(1) \Rightarrow (2)}$ Sia $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Se f é $\mathcal{U}$ q.o. costante, ok. Se no chiamo $A_k = f^{-1}(k)$ $\Rightarrow$ per ipotesi $\exists X \in \mathcal{U}$ t.c. $|X \cap A_k| = 1\ \forall k$ cioé f é $\mathcal{U}$ q.o. iniettiva.

$\boxed{2 \Rightarrow 1}$ Fisso $\mathbb{N} = \bigsqcup A_k$ con $A_k \notin \mathcal{U}\ \forall k$. Scelgo $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ t.c. $f(A_k) = k$.
Se $\exists g$ iniettiva $\mathcal{U}$-equivalente ad f allora $X = \{n \mid f(n) = g(n)\} \in \mathcal{U}$ che é un tale insieme desiderato
Se $\exists g$ costante t.c. $f =_{\mathcal{U}} g$ ho che $f =_{\mathcal{U}} \bar{k}$ per un certo $\bar{k} \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow \{n \mid f(n) = g(n)\} \in \mathcal{U}$ ma $\{n \mid f(n) = g(n)\} \subseteq A_{\bar{k}} \Rightarrow A_{\bar{k}} \in \mathcal{U}$ $\lightning$

$\boxed{2 \Rightarrow 3}$ fisso $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Se f é $\mathcal{U}$-costante $\Rightarrow f$ é $\mathcal{U}$ - non decrescente
Se f é $\mathcal{U}$ - iniettiva $\Rightarrow \exists n_0 : \forall n > n_0\ f(n) > f(n_0)$. Analogamente c'é $n_k > n_{k-1}$ t.c. $\forall n > n_k\ f(n) > f(n_k) > f(n_{k-1})$.
Allora chiamo $A_k = [n_{k-1}, n_k)$ ed $A_0 = [0, n_0)$.
prendo $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ t.c.
$$g|_{[n_{k-1}, n_k)}(n) = \begin{cases} f(n) & \text{se } f(n) \text{ é il minimo di } \{f(n_{k-1}), \dots, f(n_k - 1)\} \\ f(n_{k-1}) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

g allora é iniettiva $\mathcal{U}$-q.o. su S. Se R é l'insieme su cui f é $\mathcal{U}$-iniettiva ed X é l'insieme selettivo, ho che scegliendo $S \cap X \cap R$ ottengo il risultato.

LEZIONE 10 ESERCIZIO

(1) C clopen $\Leftrightarrow$ $C = O_A$ per $A \subset \mathbb{N}$

DIM: ($\Leftarrow$) OK perché O_A sono clopen

($\Rightarrow$) C un clopen. C aperto quindi $\exists J$ t.c. $C = \bigcup_{j \in J} O_{B_j}$

poiché O_B sono una base di $\beta\mathbb{N}$ al variare di $B \subseteq \mathbb{N}$.

Se gli $j \in J$ sono in numero finito $\Rightarrow$ $C = \bigcup_{j \in J} O_{B_j} = O_{B_{j_1} \cup \dots \cup B_{j_n}}$

Se invece sono infiniti? Ho che $\beta\mathbb{N}$ è compatto $\Rightarrow$ ritorno al caso precedente

(2) $U \subset \beta\mathbb{N}$ un aperto, allora ho che $\overline{U} = O_{U \cap \mathbb{N}}$

DIM: ($\subseteq$) Vediamo che $\forall \mathcal{U} \in U$ ho che $\mathcal{U} \in O_{U \cap \mathbb{N}}$ cioé $\{n \mid \mathcal{U}_n \in U\} \in \mathcal{U}$,

U é aperto di $\beta\mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $\exists$ O_{A_i} con $i \in I$ t.c. $U = \bigcup_{i \in I} O_{A_i}$ $\Rightarrow$ dato $\mathcal{U} \in U$

ho che c'é un i t.c. $A_i \in \mathcal{U}$. Ma ho che anche $A_i \subset U \cap \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ per le propr. di filtro $U \cap \mathbb{N} \in \mathcal{U}$ $\Rightarrow$ $O_{U \cap \mathbb{N}} \supseteq U$ $\Rightarrow$ $\overline{U} \subset \overline{O}_{U \cap \mathbb{N}} = O_{U \cap \mathbb{N}}$

($\supseteq$) $\overline{U} = \bigcap_{i \in I} O_{B_i}$. Vediamo se $O_{U \cap \mathbb{N}} \subset O_{B_i}$ $\forall i$

cioé se $U \cap \mathbb{N} \subset B_i$ $\forall i$. Per assurdo ci sia $n \in (U \cap \mathbb{N}) \setminus B_i$

t.c. $\mathcal{U}_n$ non é in O_{B_i} $\Rightarrow$ $\mathcal{U}_n$ non é in U, assurdo per ipotesi.

(3) U sia un intorno di $\mathcal{U}$ $\Rightarrow$ $U \cap \mathbb{N} \in \mathcal{U}$

DIM: U intorno di $\mathcal{U}$ $\Rightarrow$ prendo $\mathring{U}$ che é aperto

$\Rightarrow$ ho che $\mathring{U} \subseteq O_{\mathring{U} \cap \mathbb{N}}$ ma $\mathring{U} \in \mathcal{U}$ $\Rightarrow$ $O_{\mathring{U} \cap \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{U}$ e $\mathbb{N} \in \mathcal{U}$

ma $\mathring{U} \cap \mathbb{N} \subset U \cap \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $U \cap \mathbb{N} \in \mathcal{U}$

LEZIONE 10 ESERCIZIO

Sia (X, τ) uno spazio topologico e sia βX la compattificazione di Stone-Čech.

βX compatto e T2 e sia X denso in βX e valga la proprietà universale

$\Rightarrow$ βX é unico a meno di omeomorf.

DIM: ~~per~~ Siano βX e αX con le stesse proprietà di cui sopra;

per la proprietà universale applicata a $f: X \to \alpha X$ ho che $\exists!\ f': \beta X \to \alpha X$

analogamente ho che $\exists!\ g': \alpha X \to \beta X$. Dunque βX é unico

a meno di omeo...

ESERCIZIO LEZIONE 10 (continuo...)

$\boxed{3 \Rightarrow 1}$ fisso $\mathbb{N} = \bigsqcup A_k$ con $A_k = [a_{k-1}, a_k)$. Prendo $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita come nel senso inverso della dimostrazione e per ipotesi ho che f è non-decrescente su $S \in \mathcal{U}$. Definisco $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ <u>non crescente</u> sui $(S \cap A_n)$ $\forall n$ permutando le posizioni degli $f(S \cap A_n)$ dal più piccolo al più grande. Sia R l'insieme su cui g è non decrescente. Scelgo $X = S \cap R$.

$\boxed{3 \Rightarrow 4}$ Sia $\mathcal{V} \leq_{RK} \mathcal{U}$ con $\mathcal{V} = f_*(\mathcal{U})$. Per ipotesi f è Non decrescente, ma posso trovare X t.c. f sia strettamente crescente, quindi biiettiva t.c. g sia la sua inversa con $g_*(\mathcal{V}) = \mathcal{U}$.

$\boxed{4 \Rightarrow 2}$ $\mathcal{V} \leq_{RK} \mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{V} \cong \mathcal{U}$ cioè se c'è f t.c. $f_*(\mathcal{U}) = \mathcal{V}$

$\Rightarrow$ f è biiettiva. Sia g t.c. $g_*(\mathcal{U}) = \mathcal{V}$. Ma ~~f~~ è biiettiva

$\Rightarrow$ iniettiva $\Rightarrow$ $f \equiv_{\mathcal{U}} g$

10^A LEZIONE ESERCIZIO

$\{O_{A_n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ famiglia di intorni di $\mathcal{U}$ ultrafiltro non principale $\Rightarrow \exists\, B$ infinito t.c. $O_B \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_{A_n}$

DIM: $\beta\mathbb{N}$ compatto $\Rightarrow \exists\, k$ t.c. $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_{A_n} = \bigcap_{n=1}^{k} O_{A_n}$. Siccome O_{A_n} è intorno di $\mathcal{U}$ ho che $O_{A_n} \cap \mathbb{N} \in \mathcal{U}$ $\forall n = 1, \dots, k$, dunque $\left(\bigcap_{n=1}^{k} O_{A_n} \cap \mathbb{N}\right) \in \mathcal{U}$. Ma $\mathcal{U}$ è non principale $\Rightarrow \left(\bigcap_{n=1}^{k} O_{A_n} \cap \mathbb{N}\right) = O_B$ per un certo $B \subseteq \mathbb{N}$ e B è infinito poiché $\mathcal{U}$ è non principale.

11^A LEZIONE ESERCIZIO

$(\beta\mathbb{N}, \oplus)$

$$A \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V} \Leftrightarrow \{n \mid A-n \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$$

$(\beta\mathbb{N}, \oplus)$ vale:
- associatività per $\oplus$
- continuità per la funzione: $\varphi_{\mathcal{V}} : \beta\mathbb{N} \to \beta\mathbb{N}$, $\mathcal{U} \mapsto \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ $\forall \mathcal{V}$

DIM: • C^0: O_A sia un aperto. Allora

$$\varphi_{\mathcal{V}}^{-1}(O_A) = \{\mathcal{U} \mid \mathcal{U} \oplus \mathcal{V} \in O_A\} = \{\mathcal{U} \mid A \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}\} = \{\mathcal{U} \mid \underbrace{\{n \mid A-n \in \mathcal{V}\}}_{B} \in \mathcal{U}\} = O_B$$

• $(\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}) \oplus \mathcal{W} \overset{?}{=} \mathcal{U} \oplus (\mathcal{V} \oplus \mathcal{W})$

$$A \in (\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}) \oplus \mathcal{W} \Leftrightarrow \{n \mid A-n \in \mathcal{W}\} \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V} \Leftrightarrow \{m \mid \{n \mid A-n \in \mathcal{W}\} - m \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$$

$$\Leftrightarrow \{m \mid \{s \mid \{s+m \mid A-s-m \in \mathcal{W}\}\} \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \{m \mid \{s \mid A-s-m \in \mathcal{W}\} \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U} \Leftrightarrow \{m \mid A-m \in \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}\} \in \mathcal{U}$$

$$\Leftrightarrow A \in \mathcal{U} \oplus (\mathcal{V} \oplus \mathcal{W})$$