Dinamica Topologica

Federico Scavia

May 27, 2015

Esercizio 1. *Sia $x \in X$ non definitivamente periodico per la mappa T. Allora x è ricorrente se e solo se $\forall U$ intorno di X $orb(x) \cap U$ è infinito.*

Proof. Se $U \cap \mathrm{orb}(x)$ fosse finito, troverei un intorno V di x che lo separa dagli altri punti (per regolarità, se i punti sono chiusi) dell'orbita in U e x non torna più in V.

Senza assumere che i punti siano chiusi, ragioniamo così. Se x è ricorrente, allora preso U intorno di Tx esiste n tale che $T^n x \in T^{-1}(x)$ e dunque $T^{n+1}(x) \in U$, ovvero anche Tx è ricorrente e quindi l'orbita di x è fatta di punti ricorrenti. Ma allora preso $U \ni x$ intorno, per ipotesi per qualche n_1 $T_1^n x \in U$, allora esiste $n_2 > n_1$ per cui $T^{n_2} x \in U$ e così via, e tutti i punti sono distinti perché sennò l'orbita sarebbe definitivamente periodica.

L'altro verso è ovvio. □

Esercizio 2. *$x \in X$ è ricorrente se e solo se esiste $\nu \in^* \mathbb{N}$ infinito con $T^\nu x \in \mu(x)$.*

Proof. Se x è ricorrente, la famiglia degli $R_U := \{n | T^n x \in U\}$ dove U è un aperto contenente x ha la proprietà dell'intersezione finita, dunque (enlargement) trovo $\xi \in \cap * R_U$ e per tale ξ si ha $T^\xi \in *U$ per ogni U, ovvero $T^\xi \in \mu(x)$. L'altro verso è ovvio. □

Esercizio 3.

$$T_\nu(x) = \mathrm{II}_\nu - \lim_n T^n x.$$

Proof.

$$\begin{aligned}
T_\nu(x) = y \iff & \\
& T^\nu(x) \in \mu(y) \\
& \forall U \ni y \; T^\nu x \in *U \\
& \forall U \ni y \; \{n : T^n x \in U\} \in \mathrm{II}_\nu \\
& y = \mu_\nu - \lim_n T^n x.
\end{aligned}$$

Il primo passaggio è la definizione di T_ν, il secondo quella di monade, il terzo è perché $A \in \mathrm{II}_\nu \iff \ni \in *A$ e il quarto è la definizione di II_ν-limite. □

Esercizio 4.

$$T_\mu T_\nu x = (\mathrm{II}_\mu \oplus \mathrm{II}_\nu) - \lim_n T^n x.$$

Proof.

$$\begin{aligned}
y = (\mathrm{II}_\mu \oplus \mathrm{II}_\nu) & \\
& \iff \forall U \ni y \; A_U := \{m : \{\xi : T^{m+n} \in U\} - m \in \mathrm{II}_\nu\} \in \mathrm{II}_\mu \\
& \iff \forall U \ni y \; \mu \in *A_U \\
& \iff y = T_\mu T_\nu x
\end{aligned}$$

□