Esercizi vari

Federico Scavia

May 24, 2015

Esercizio 1. *Sia F una famiglia di sottinsiemi di un insieme X.*

F è debolmente regolare per partizioni su X se e solo se contiene un ultrafiltro.

F è regolare per partizioni se e solo se è unione di ultrafiltri.

Proof. Chiaramente un ultrafiltro è debolmente regolare per partizioni, quindi se F ne contiene uno a maggior ragione F è debolmente regolare per partizioni ($X = C_1 \coprod \cdots \coprod C_r \in U \Rightarrow \exists i\ C_i \in U \subseteq F$).

Se F è unione di ultrafiltri e $A \in F$ allora A sta in un ultrafiltro $U \subseteq F$, dunque se $A = C_1 \coprod \cdots \coprod C_r \in U \Rightarrow \exists i\ C_i \in U \subseteq F$.

Per i versi opposti occorre supporre (come è naturale e come abbiamo sempre fatto in classe) che F sia chiusa per soprainsieme, altrimenti basterebbe prendere $F = \{\emptyset\}$.

Per la prima implicazione, diciamo $A \in U \iff A \in F$ e $A^c \notin F$. $\mathbb{N}$ c'è, il vuoto no; se A c'è e $B \supseteq A$ allora B^c non c'è perché sennò ci sarebbe A^c (chiusura per soprainsieme di F) e dunque deve esserci B perché $\mathbb{N} = B \coprod B^c$; se A e B ci sono allora $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \subseteq A^c$ non può esserci (altrimenti ci sarebbe A^c), dunque deve esserci $A \cap B$. Quindi U è un ultrafiltro ed è chiaramente contenuto dentro F.

Per la seconda implicazione, prendiamo $A \in F$ e cerchiamo un ultrafiltro $U \subseteq F$ contenente A come elemento. Prendiamo $G := \{B \subseteq X \mid \forall C \in F\ B \cap C \neq \emptyset\}$. Prendiamo $H = G \cup \{A\}$. Allora H ha la proprietà dell'intersezione finita, dunque esiste un ultrafiltro U contenente H (e in particolare contenente A). Tale ultrafiltro è contenuto in F, perché preso $S \in U \setminus F$ si ha $S^c \notin U \supseteq G$ e dunque esiste $B \in F$ tale che $B \cap S^c = \emptyset$, ovvero $B \subseteq S$. Si conclude perché F è chiusa per soprainsieme.

□

Dimostro la proposizione che caratterizza gli spessi. Per ottenere quella sui sindetici, basta ricordare che A sindetico $\iff$ A^c non è spesso.

Esercizio 2. *Sia $A \subseteq \mathbb{N}$. Sono equivalenti:*

1. *A spesso.*
2. *$\exists[\nu, \mu] \subseteq^* A$ con $\mu - \nu \in^* \mathbb{N}$ infinito.*
3. *$\forall \nu \in^* \mathbb{N}$ esiste I intervallo di lunghezza $|I| = \nu$ con $I \subseteq^* A$.*
4. *$\exists \nu \in^* \mathbb{N}$ tale che $\nu + n \in^* A$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.*

Proof. Chiaramente $3 \Rightarrow 2 \Rightarrow 4$. Inoltre $4 \Rightarrow 1$ perché se $\nu = [(x_k)_k]$, dire $\nu + n \in^* A$ è come dire $\forall n \in \mathbb{N} A_n := \{k : x_k + n \in A\} \in U$ e dunque preso $k \in A_0 \cap \cdots \cap A_n$ si ha $x_k, x_k + 1, \ldots, x_k + n \in A$.

Resta da dimostrare $1 \Rightarrow 3$. Sia $\nu = [(x_k)_k]$. Prendiamo $[a_n, b_n]$ una successione di intervalli contenuti in A con $b_n - a_n \geq x_n$. Poniamo $\mu_1 = [a_n]$ e $\mu_2 = [b_n]$. Allora se $\mu_1 \leq \mu \leq \mu_2$, μ è della forma $[c_k]$ con $\{k : a_k \leq c_k \leq b_k\} \in U$, ma allora $c_k \in A$ U-quasi ovunque e quindi $\mu \in^* A$. In altre parole $[\mu_1, \mu_2] \subseteq^* A$. □

Esercizio 3. *A è sindetico a tratti se e solo se esiste I intervallo infinito tale che ${}^*A \cap I$ ha buchi finiti.*

Proof. Sia A sindetico a tratti. Allora esiste $k > 0$ ed esistono intervalli $[a_n, b_n] \subseteq A$ con $b_n - a_n \geq n$ tali che per ogni $x \in [a_n, b_n]$ $\{x, x+1, \dots, x+k\} \cap A \neq \emptyset$. Allora $I = [\alpha, \beta]$, con $\alpha = [a_n]$ e $\beta = [b_n]$, è un intervallo infinito. Inoltre preso $\xi = [(y_n)_n] \in [\alpha, \beta]$ allora $a_n \leq y_n \leq b_n$ per U-quasi ogni n e per tali n esiste $z_n \in \{0, 1, \dots, k\}$ con $y_n + z_n \in A$, dunque posto $\eta = [(z_n)_n]$ si ha immediatamente $z_n \in \{0, 1, \dots, k\} \subseteq^* \mathbb{N}$ e $\xi + \eta \in^* A \cap I$.

D'altra parte, se ${}^*A \cap I$ ha buchi finiti, li ha anche limitati da una certa costante $k \in \mathbb{N}$, altrimenti per overspill avrebbe un buco infinito. Se ora $I = [\alpha, \beta]$, con $\alpha = [a_n]$ e $\beta = [b_n]$, certamente $b_n - a_n$ tende all'infinito ($|I|$ è infinita). L'insieme degli n per cui in $[a_n.b_n]$ i buchi sono limitati da k sta nell'ultrafiltro, altrimenti ci starebbe il complementare e si troverebbero per tali n due successioni $(x_n), (y_n)$ con $a_n \leq x_n \leq y_n \leq b_n$ e $y_n - x_n \geq k + 1$, con il risultato che $[y_n] - [x_n] > k$. □

Esercizio 4 (Esercizio di Pasqua mancante)**.**

1. *Se U è idempotente allora contiene $k\mathbb{N}$ per ogni $k \geq 1$.*
2. *Esiste W con $W \oplus U = U \iff \forall A \in U\ \exists n A - n \in U$*
3. *U idempotente $\iff \forall A \in U\ \exists a \in A A - a \in U$*
4. *$\coprod_\alpha = \{A \subseteq \mathbb{N}\ |\alpha \in^* A\}$ è idempotente se e solo se $\forall \alpha \in^* A$ esiste $a \in A$ con $\alpha + a \in^* A$.*

Proof.

1. Colorando $\mathbb{N}$ a seconda della congruenza modulo k, esiste a per cui $k\mathbb{N} + a \in U$. Ma $k\mathbb{N} + a \in U \iff k\mathbb{N} + a \in U \oplus U \iff \{n : k\mathbb{N} + a - n \in U\} = k\mathbb{N} \in U$, dunque deve essere $a = 0$ e $k\mathbb{N} \in U$.

2. Se esiste tale W e $A \in U$ allora $A \in W \oplus U$ ovvero $\{n : A - n \in U\} \in W$ e quindi è non vuoto. Per il viceversa, denotiamo con $\overline{A} := \{n \in \mathbb{N} \mid A - n \in U\}$ e l'ipotesi è $A \in U \Rightarrow \overline{A} \neq \emptyset$. Presi $A_1, \dots, A_k$ allora $\overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_k} \supseteq \overline{A_1 \cap \dots \cap A_k}$, dunque i $\overline{A}$ hanno la proprietà dell'intersezione finita. Prendo W un ultrafiltro che li contiene tutti e dimostro che $W \oplus U = U$. Se $A \in U$ allora $\overline{A} \in W$ e dunque per definizione $A \in W \oplus U$, dunque $U \subseteq W \oplus U$, ma allora vale l'uguale perché U è ultrafiltro.

3. Il primo verso è identico a prima. Per il viceversa, modifichiamo l'argomento di prima, ponendo $\overline{A} := \{n \in A \mid A - n \in U\}$. Di nuovo i $\overline{A}$ al variare di A in U hanno la proprietà dell'intersezione finita, quindi preso W che li estende, si ha come prima $W \oplus U = U$ e d'altra parte per costruzione di W $A \in U \Rightarrow A \supseteq \{n \in A : A - n \in U\} \in W$, dunque $U \subseteq W$ e quindi $U = W$.

4. La parte dopo il segno di $\iff$ dice esattamente $A \in \coprod_\alpha \Rightarrow \exists a \in A$ tale che $A - a \in \coprod_\alpha$. Quindi questo è un caso particolare del punto precedente.

□

Esercizio 5 (Proprietà di base della finita immergibilità)**.** *Scriviamo $A \leq B$ se A è finitamente immergibile in B. Chiaramente $\leq$ è riflessivo e transitivo (diventa un ordine parziale sulle classi di equivalenza rispetto alla relazione di essere $\leq$ e $\geq$).*

1. *A spesso, $A \leq B$, allora B spesso.*
2. *A spesso se e solo se A $\leq$-massimale.*
3. *A AP-rich, $A \leq B$, allora B AP-rich.*
4. *$A \leq B$ allora $BD(A) \leq BD(B)$.*
5. *$A \leq B$ non implica $\overline{d}(A) \leq \overline{d}(B)$.*
6. *A sindetico a tratti, $A \leq B$, allora B sindetico a tratti.*
7. *A sindetico, $B \leq A$ non implica B sindetico.*

Proof.

1. Per trovare un intervallo lungo k in B basta immergerne uno lungo k di A.
2. Se A è sindetico è chiaro che ogni B è finitamente immergibile in A, preso $F \subseteq B$ finito prendo I intervallo contenente F e lungo k e so che posso immergere I in A.
3. Basta immergere le progressioni aritmetiche di A in B.
4. Per ogni k, n posso immergere in B l'insieme finito $A \cap [k, k+n]$, dunque $|A \cap [k, k+n]| \leq \max_{x \in \mathbb{N}} |B \cap [x, x+n]|$, quindi anche $\max_{x \in \mathbb{N}} |A \cap [x, x+n]| \leq \max_{x \in \mathbb{N}} |B \cap [x, x+n]|$ e passando al limite $BD(A) \leq BD(B)$.
5. L'insieme dei numeri pari ha densità $1/2$ ed è finitamente immergibile in ogni insieme spesso, ma ci sono spessi con densità superiore 0.
6. Di nuovo, preso in A un intervallo lungo N con buchi al più di k, posso immergerlo in B.
7. L'insieme dei numeri pari è sindetico ed è finitamente immergibile nell'insieme $\cup_{k \in \mathbb{N}} [2^{2k}, 2^{2k+1}]$, che però non è sindetico.

$\square$

Esercizio 6 (Definizioni equivalenti dei P-Points)**.** *Sono equivalenti per P ultrafiltro non principale:*

1. *P è un P-point (intersezione numerabile di intorni di P sono intorno di P);*
2. *$\forall \mathbb{N} = \coprod_{i=1}^{\infty} C_i$ con $C_i \notin U$ esiste $X \in U$ tale che $X \cap C_i$ è finito;*
3. *$\forall f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ esiste $A \in U$ tale che $f|_A$ è costante o ha fibre finite;*
4. *$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/U$ esiste $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ tale che $\epsilon = [x_n]_U$.*

Proof. (2) $\Rightarrow$ (3)**:** con $C_i = f^{-1}(i)$.

(1) $\Rightarrow$ (2)**:** dall'ipotesi $U \in \cap_{i=1}^{\infty} \mathcal{O}_{C_i^c}$. Esiste quindi $A \in P$ tale che per ogni ultrafiltro V se $A \in V$ allora $\forall i C_i^c \in V$. Se per assurdo $A \cap A_i$ fosse infinito, potrei estenderlo ad ultrafiltro principale (sia V), allora $A_i \in V$ e $A \in V$ e quindi $A_i^c \in V$, assurdo.

(3) $\Rightarrow$ (1)**:** siano $\mathcal{O}_{A_i}$ intorni di U (possiamo supporre che siano decrescenti rispetto all'inclusione). Poniamo $f(x) = i$ quando $x \in B_{i-1} \setminus B_i$. f non è U-quasi ovunque costante, quindi esiste $g \equiv_U f$ con g a fibre finite. L'insieme dove $f = g$ soddisfa la condizione 1.

$\square$

Esercizio 7. *A spesso $\iff$ $\exists U$ non principale tale che $\beta\mathbb{N} \oplus U \subseteq \mathcal{O}_A$, cioè $A \in V \oplus U$ $\forall V$.*
A sindetico $\iff$ $\forall U$ non principale $(\beta\mathbb{N} \oplus U) \cap \mathcal{O}_A \neq \emptyset$.

Proof. Il secondo enunciato seguirà immediatamente una volta dimostrato il primo (A sindetico $\iff$ A^c non spesso). Dimostriamo quindi il primo fatto.

Sia U non principale tale che $A \in V \oplus U$ $\forall V$. Questo vuol dire che $\overline{A}_V = \{n : A - n \in U\} \in V$ per ogni V (se B è sottoinsieme proprio di $\mathbb{N}$, B^c è non vuoto, la famiglia $\{B^c\}$ ha la FIP e quindi c'è un ultrafiltro che contiene B^c e quindi non B), quindi $\{n : A - n \in U\} \in \mathbb{N}$. In particolare per ogni m $A \cap (A-1) \cap \cdots \cap (A-m) \in U$ è non vuoto, e questo è come dire che A è spesso.

D'altra parte se A è spesso allora $\{A-m\}_m$ ha la proprietà dell'intersezione finita. Prendiamo U ultrafiltro che estende la famiglia. U è non principale a meno che $A = \mathbb{N}$, nel qual caso comunque possiamo scegliere come U un ultrafiltro qualsiasi. Per ogni ultrafiltro V $A \in V \oplus U$, infatti $\{n : A - n \in U\} = \mathbb{N} \in V$. $\square$

Esercizio 8. *Se $\overline{d}(A) > 0$ allora $A - A$ è sindetico.*

Proof. Prendiamo $S : A \to A + 1$ lo shift su A, quindi $S^{-n}(A) = A - n$.

S preserva la misura data dalla densità superiore, dunque se $\overline{d}(A) = \alpha > 0$ allora $\overline{A} = \{n : \overline{d}(A \cap S^{-n}A) > 0\}$ è sindetico (se avessi un buco grande $N > 1/\alpha$ allora le iterate di S corrispondenti agli elementi del buco darebbero controimmagini di A tutte disgiunte, quindi l'unione avrebbe misura $N/\alpha > 1$). Per concludere che $A - A$ è sindetico basta dimostrare che $\overline{A} \subseteq A - A$. Sia $n \in \overline{A}$: allora $A \cap (A - n) \neq \emptyset$ è in particolare non vuoto e dunque esiste $x \in A$ con $x + n \in A$, da cui $n \in A - A$. $\square$

Esercizio 9. *Valgono le seguenti proprietà*

1. *$A \in U, B \in V$ allora $A + B \in U \oplus V$.*
2. *Esiste X infinito con $X \oplus X := \{x + x' | x \neq x' \in X\} \subseteq A$ $\iff$ esiste U non principale con $A \in U \oplus U$.*
3. *Esistono X, Y infiniti con $X + Y \subseteq A$ se e solo se esistono U, V non principali con $A \in (U \oplus V) \cap (V \oplus U)$.*
4. *Generalizzare.*
5. *Definiamo la somma di filtri analogamente alla somma di ultrafiltri. Se V è ultrafiltro e F è filtro allora $W \supseteq F \oplus V$ se e solo se esiste un ultrafiltro $U \supseteq F$ con $W = U \oplus V$.*

Proof.
1. $A + B \in U \oplus V \iff \{n : A + B - n \in V\} \in U$. Ora, sicuramente $A + B - n \in V$ quando $n \in A$ e questo succede U-quasi ovunque.

2. Se $A \in U \oplus U$ allora $\overline{A} = \{n : A - n \in U\} \in U$. Prendiamo $x_1 \in \overline{A}$. Allora esiste $x_2 > x_1$ tale che $x_2 \in A - x_1$, ovvero $x_1 + x_2 \in A$. Prendiamo allora $x_3 \in \overline{A} \cap (A - x_1) \cap (A - x_2)$, allora $x_3 + x_2, x_3 + x_1 \in A$. Induttivamente costruiamo X.

   Viceversa, se esiste X infinito con $X \oplus X \subseteq A$, basta prendere U non principale contenente X e allora $A \in U \oplus U$, infatti $\{n : A - n \in U\} \supseteq X \in U$.

3. Se $A \in (U \oplus V) \cap (V \oplus U)$ con U, V non principali, si ha $B = \{n : A_n \in V\} \in U$ e $C = \{n : A_n \in U\} \in V$. Prendiamo $x_1 \in B$ e $y_1 \in (A - x_1) \cap C \in V$. Prendo $x_2 \in (A - y_1) \cap B \in U$ e $y_2 \in (A - x_1) \cap (A - x_2) \cap B$. In generale prendo $x_k \in (A - y_1) \cap \cdots \cap (A - y_k) \cap B \in U$ e $y_k \in (A - x_1) \cap \cdots \cap (A - x_k) \in V$ e costruisco così $X = \{x_i\}$ e $Y = \{y_i\}$.

   Viceversa, se $X + Y \subseteq A$ con X, Y infiniti, prendo U, V non principali contenenti X e Y rispettivamente, allora per il primo punto $X + Y \subseteq U \oplus V$ e $X + Y = Y + X \subseteq V \oplus U$.

4. Esiste X infinito con $FS_{\leq k}(X) \subseteq A$ se e solo se esiste U non principale con $A \in U \oplus \cdots \oplus U$ (k addenti).

   Esistono $X_1, \ldots, X_r$ infiniti con $X_1 + \cdots + X_r \subseteq A$ se e solo se esistono ultrafiltri non principali $U_1, \ldots, U_r$ con $A \in U_{\sigma(1)} \cap \cdots \cap U_{\sigma(r)}$ per ogni σ permutazione di $\{1, \ldots, r\}$.

   Le dimostrazioni sono identiche alle precedenti.

5. La freccia verso sinistra è chiara perché $U \oplus V$ contiene $F \oplus V$. Per l'altro verso, dire $W \supseteq F \oplus V$ vuol dire che se $\{n : A - n \in V\} \in Z$ per ogni Z ultrafiltro contenente F allora $A \in W$. In altre parole $W \in \mathcal{O}_A$ quando $Z \oplus V \in \mathcal{O}_A$ per ogni tale Z, ovvero ogni volta che un aperto $\mathcal{O}_A$ contiene $\{Z \supseteq F\}$ contiene anche W, ovvero W sta nella chiusura di $\{Z \supseteq F\}$. Non resta che mostrare che $\{Z \supseteq F\}$ è chiuso: se l'ultrafiltro X non contiene F allora c'è un $A \in F$ con $A \notin X$, ma allora $X \in \mathcal{O}_{A^c}$ e $\mathcal{O}_{A^c} \cap \{Z \supseteq F\} = \emptyset$ (nessun tale Z può contenere A^c perché deve contenere A).

$\square$