Esercizi lezione 18/5/15, Andrea Vaccaro

21 maggio 2015

Proposizione 0.1. *Sia X spazio compatto e di Hausdorff. Verificare che:*

i) $T_\nu(x) = \sqcup_\nu - \lim_n T^n(x)$

ii) $T_\mu(T_\nu(x)) = (\sqcup_\mu \oplus \sqcup_\nu) - \lim_n T^n(x)$

Dimostrazione. i).

Per verificare che $st(T^\nu(x)) = T_\nu(x) = \sqcup_\nu - \lim_n T^n(x) = l$, è sufficiente, per unicità del limite, mostrare che per ogni intorno aperto A di $T_\nu(x)$ valga $\hat{A} = \{n : T^n(x) \in A\} \in \sqcup_\nu$, cioè $\nu \in {}^*\hat{A}$. La definizione di $\hat{A}$ è tale per cui valga la formula $\forall n \in \mathbb{N}(n \in \hat{A} \leftrightarrow T^n(x) \in A)$, dunque per il transfer vale $\forall \nu \in {}^*\mathbb{N}(\nu \in {}^*\hat{A} \leftrightarrow T^\nu(x) \in {}^*A)$. Siccome, dato un qualunque aperto A contenente $T_\nu(x)$ vale che $T^\nu(x) \in {}^*A$ (poiché $st(T^\nu(x)) = T_\nu(x)$), allora segue che $\nu \in {}^*\hat{A}$.

ii).

Per il punto precedente si ottiene che $T_\mu(T_\nu(x)) = T_\mu(\sqcup_\nu - \lim_n T^n(x)) = \sqcup_\mu - \lim_m T^m(\sqcup_\nu - \lim_n T^n(x))$.

Claim 0.2. *Se f è funzione continua, allora vale che $l = f(U - \lim_n a_n) = U - \lim_n f(a_n)$.*

Poiché lo spazio è di Hausdorff, per unicità, è sufficiente verificare che dato A intorno aperto di l, valga $\{n : f(a_n) \in A\} \in U$. Dato allora tale A, considero $f^{-1}(A)$ che, per continuità di f, è un intorno aperto di $U - \lim_n a_n$, il che significa che l'insieme $\{n : a_n \in f^{-1}(A)\} \in U$. Dal momento che, se $a_n \in f^{-1}(A)$ allora $f(a_n) \in A$, segue che $\{n : f(a_n) \in A\} \supseteq \{n : a_n \in f^{-1}(A)\} \in U$ da cui segue la tesi.

Riprendendo la dimostrazione si ha allora che $T_\mu(T_\nu(x)) = \sqcup_\mu - \lim_m(\sqcup_\nu - \lim_n T^{m+n}(x))$ per continuità di T. Per un esercizio svolto in classe, si ha che $\sqcup_\mu - \lim_m(\sqcup_\nu - \lim_n T^{m+n}(x)) = (\sqcup_\mu \oplus \sqcup_\nu) - \lim_n T^n(x)$, dunque la tesi segue. $\square$