Esercizi lezione 12/5/15, Andrea Vaccaro

21 maggio 2015

Proposizione 0.1. *Verificare che:*

i) *A è aperto se e solo se per ogni $\xi \approx a \in A$ allora $\xi \in {}^*A$.*

ii) *C è chiuso se e solo se quando esiste $\xi \in {}^*C$ e $\xi \approx x$ allora $x \in C$.*

Dimostrazione. i).

Sia A aperto e vaga $\xi \approx a \in A$, questo significa che $\xi \in \bigcap_{U \text{ intorno di } a} {}^*U$. Poiché $a \in A$ esiste $\hat{U}$ intorno aperto di a contenuto in A. Ma allora, per transfer vale che ${}^*\hat{U} \subseteq {}^*A$, e poiché $\xi \in {}^*\hat{U}$, vale $\xi \in {}^*A$.

Viceversa, sia $a \in A$ e supponiamo che in ogni intorno U di tale punto vi sia un punto non appartenente ad A. Sia $\{U_i\}_{i \in I}$ l'insieme di tutti gli intorni di a. Per ognuno di questi posso considerare $W_i = U_i \cap A^c$; per ipotesi $W_i \neq \emptyset$ per ogni $i \in I$. Prendiamo una famiglia finita di W_{i_j}; considerando i corrispondenti U_{i_j}, si ha che l'intersezione di questi è ancora un intorno aperto di a (poiché sono finiti), e quindi anche tale intersezione deve ammettere un punto non in A. Questo significa che i W_{i_j} hanno almeno un punto in comune, e più in generale che la famiglia $\{W_i\}_{i \in I}$ gode della proprietà dell'intersezione finita. Ma allora per $|I|$-enlargement esiste uno $\xi \in \bigcap_{i \in I} {}^*W_i$. Per definizione dei W_i si ha che $\xi \approx a$, però poiché $\bigcap_{i \in I} {}^*W_i = (\bigcap_{i \in I} {}^*U_i) \cap {}^*A^c$, deve valere $\xi \in {}^*A^c$, assurdo per ipotesi.

ii).

Sia C chiuso, valga $\xi \in {}^*C$ e $\xi \approx x$, ma si abbia $x \notin C$. Segue che $x \in C^c$, che è aperto, ma allora per il punto precedente deve valere $\xi \in {}^*C^c$, il che è assurdo.

Per mostrare il viceversa, verifichiamo che C^c è aperto. Infatti, se $\xi \approx x \in C^c$, e per caso valesse $\xi \notin {}^*C^c$, ovvero $\xi \in {}^*C$, per ipotesi si dovrebbe avere $x \in C$, che sarebbe assurdo. $\square$

Proposizione 0.2. *Un elemento $x \in X$ è ricorrente $\Leftrightarrow$ per ogni intorno aperto U che lo contiene, vale che l'insieme $\{n : T^n(x) \in U\}$ è infinito.*

Dimostrazione. La freccia $\Leftarrow$ è ovvia.

Vediamo l'altro verso. Supponiamo esista U intorno aperto di x tale che gli unici elementi di $\mathrm{orb}(x)$ in esso siano $T^{i_i}(x), \cdots, T^{i_k}(x)$ con $1 < i_1 < \cdots < i_k$. Considero l'insieme $V = T^{-i_k}(U) = T^{-1}(\cdots T^{-1}(U))$, controimmagine di U mediante T fatta i_k volte. Poiché T è continua, V è aperto, inoltre $x \in V$ poiché $T^{i_k}(x) \in U$. Considerando l'insieme $U \cap V$, questo è un intorno di x contenuto in U; poiché x è ricorrente, esiste n tale che $T^n(x) \in U \cap V$, ma quindi deve essere $n = i_j$ per $1 \leq j \leq k$. Segue dunque che $T^{i_k}(T^{i_j}(x)) \in U$, quindi sarà uguale a un certo $T^{i_l}(x)$. Allora deve valere $i_j + i_k = i_l$, il che è assurdo perché implicherebbe $i_l > i_k$. Come conseguenza, si ha che devono esistere infiniti n per cui $T^n(x) \in U$. $\square$