3^A LEZIONE 1° ESERCIZIO

Sia $(P,\leq)$ un poset infinito, allora $\exists\, X \subseteq P$ catena infinita, o esiste X anticatena infinita.

Sia $a_1 \in P$. Chiamo $X_{a_1} = \{ b \in P \mid a_1 \leq b \text{ o } b \leq a_1 \}$.

Per Ramsey ho che X_{a_1} o $X_{a_1}^c$ sono infiniti.

Allora suppongo che X_{a_1} sia infinito $\Rightarrow$ scelgo $a_2 \in X_{a_1}$ e chiamo $X_{a_2} = \{ b \in P \mid b \leq a_2 \text{ o } a_2 \leq b \}$. Se X_{a_2} <u>non</u> è infinito, e lo è $X_{a_2}^c$, scarto a_2 e prendo $a_3 \in X_{a_1} \setminus \{a_2\}$.

Ma $\exists\, a_i \in X_{a_k} \setminus \{a_{k+1}, \dots, a_{i-1}\}$ t.c. X_{a_i} sia infinito?

con $i-1 \geq k+1$

Se no, avrei che X_b^c sarebbero tutti infiniti $\forall\, b \in \underbrace{X_{a_k} \setminus \{a_1, \dots, a_k\}}_{=\,Y}$

vuol dire che ci sono, per ogni b di quel tipo, $a \in P$ t.c. $a \nleq b$ e $a \ngeq b$. Prendo $b_1 \in Y$ ed ho $Y_{b_1} = \{ c \in P \mid c \nleq b_1 \text{ e } c \ngeq b_1 \}$; per ipotesi Y_{b_1} è infinito.

Poi prendo $b_2 \in Y_{b_1}$ t.c. $Y_{b_2} = \{ c \in P \mid b_1 \ngeq c \}$ che è infinito per ipotesi. Ho trovato $\{b_1, b_2, \dots\}$ anticatena infinita.

Altrimenti, se esiste sempre dopo un numero finito di estrazioni un a_i t.c. X_{a_i} è infinito $\Rightarrow$ ho trovato una catena.

3^A LEZIONE 2° ESERCIZIO

TEO (Schur finito): $\forall r\ \exists n\ \forall \{1, \dots, n\} = C_1 \cup \dots \cup C_r\ \exists i : \exists\, a < b < a+b \in C_i$

DIM: fisso r $\Rightarrow$ per Schur $\exists\, i$ t.c. ci sono a, b con $a, b, a+b \in C_i$

$\Rightarrow$ basta prendere $n = a+b$ e trovo che $\{1, \dots, n\} = C_1 \cup \dots \cup C_r$ e per hp ho i, a, b t.c. $a, b, a+b \in C_i$

3^A LEZIONE $3°$ ESERCIZIO

$\mathbb{N} = C_1 \cup \ldots \cup C_r \quad \exists i \ \forall m \ \exists B : |B| = m \quad e \quad \Delta(B) \subseteq C_i$

DIM: fisso r fisso la colorazione. Per Teo distanze infinite ho che

$\exists \ H$ infinito t.c. $\Delta(H) \subseteq C_i$. Fisso m. Sia $B \subset H$ t.c.

$|B| = m \Rightarrow \Delta(B) \subseteq \Delta(H) \subseteq C_i$

3^A LEZIONE - $3°$ ESERCIZIO SU i Δ-set

- Δ-set regolari per partizioni.

$\underbrace{\text{Fisso } X \in \mathcal{F}}$, fisso r, fisso la colorazione.

$\Downarrow$

$\exists \ H$ infinito con $\Delta H \subset X = C_1 \cup \ldots \cup C_r \Rightarrow \Delta H = C_1 \cup \ldots \cup C_r |_{\Delta H}$

$\Rightarrow$ Per Ramsey in versione $K=1$ $\exists \ (\Delta H)' \subset \Delta H$ infinito,

$\exists i$ t.c. $(\Delta H)' \subset C_i \Rightarrow$ cerco sottoinsieme $W' \subset H$ infinito

t.c. $\Delta(W') \subset (\Delta H)'$

- Δ_f-set sono regolari per partizioni.

$X \in \Delta_f \quad$ (cioè $\forall m \ \exists |H| = m : \Delta H \subset X$)

$X = C_1 \cup \ldots \cup C_r \Rightarrow \exists_i : C_i \in \mathcal{F}$

fisso r, fisso m, fisso $X = C_1 \cup \ldots \cup C_r$.

VOGLIO: $\exists i : \forall m \ \exists W : \Delta W \subset C_i$.

$X \quad \Delta_f \Rightarrow X$ infinito $\Rightarrow$ per Ramsey con $K=1$ ho che

$\exists \ H$ infinito sottoinsieme di X con $H \subset C_i$. Poiché $H \subset X$,

ho che $X = H \cup X \setminus H \Rightarrow$ se $\underline{\underline{H}}$ ed $\exists W$ infinito

t.c. $\Delta W \subset H \Rightarrow \Delta W \subset C_i$. Se invece $\underline{\underline{X \setminus H}}$ non é

finito ($\Rightarrow$ lo posso scegliere, se no devo per forza scegliere H) $\Rightarrow$ riapplico

il procedimento su $X \setminus H$ finché $(X \setminus H) \setminus \ldots \setminus H_n$ é finito.

3ª LEZIONE . ESERCIZIO SU Δ-set

Trova insieme che non é Δ-set ≠ { dispari }

3ª LEZIONE , ESERCIZIO

Trova $\mathbb{N} = C_1 \sqcup C_2$ t... né C_1 né C_2 contengono progressioni aritmetiche. Coloro $\mathbb{N}$ nel seguente modo:

C_1: 0 2 3 6 7 8 ...

C_2: 1 4 5 9 10 11 ....

3ª LEZIONE , PENULTIMO ESERCIZIO → distanze
E ULTIMO ESERCIZIO → Ramsey

DEF: $\mathcal{A}$ é r-regolare su X se $\forall X = C_1 \sqcup \dots \sqcup C_r \; \exists A \in \mathcal{A}$ t.c. A monocromatico

esercizio: $\forall r \; \mathcal{A} = \{ \{a < b < a+b\} \mid a, b \in \mathbb{N} \}$ é r-regolare su $\mathbb{N}$ per Shur infinito.
Allora $\exists Y \subset \mathbb{N}$ finito su cui $\mathcal{A}$ é r-regolare. $\forall n \; Y \subseteq \{1, \dots, n\} \Rightarrow$
$\forall \{1, \dots, n\} = C_1 \sqcup \dots \sqcup C_r \; \exists A \in \mathcal{A} : A \subseteq C_i$.

$\mathcal{A}$ é r-regolare su $\mathbb{N}$ per il teo delle distanze infinito, ma per il Teo di compattezza combinatoria $\Rightarrow$ sottoinsieme:
$\forall \mathbb{N} = C_1 \sqcup \dots \sqcup C_r \Rightarrow \exists H$ infinito $\exists i$ t... $\Delta H \subset C_i$,
allora in particolare c'é un sottoinsieme finito H' di H con $\Delta H' \subset C_i$. Allora per il Teo di compattezza combinatoria ho che $\exists Y \subset \mathbb{N}$ finito t.c. $\mathcal{A}$ é r-regolare su Y.
$\forall n \quad Y \subset \{1, \dots, n\}$ ho che $\forall \{1, \dots, n\} = C_1 \sqcup \dots \sqcup C_r$ ho che c'é $A \in \mathcal{A}$ con $A \subset C_i$.

$\boxed{\text{Ramsey}}$: Fisso k, m, r. $\mathcal{A} = \{ [H]^k \mid H$ di dimensione $m \}$
$\mathcal{A}$ é r-regolare su $\mathbb{N}$. Infatti $\mathbb{N} = C_1 \sqcup \dots \sqcup C_r \Rightarrow$ per Ramsey infinito ho che $\exists H$ infinito $\exists i$ t... $[H]^k \subseteq C_i$

$\Rightarrow \exists$ sottoinsieme finito H' di H di cardinalità m t.c. $[H']^K \subseteq C_i$ $\Rightarrow$ Per compattezza combinatoria ho che $\exists Y \subseteq \mathbb{N}$ finito t.c. $\mathcal{A}$ è r-reg. su Y $\Rightarrow \forall n : Y \subset \{1, \dots, n\}$ ho che se $\{1, \dots, n\} = C_1 \cup \dots \cup C_r \Rightarrow \exists A \in \mathcal{A}$ t.c. A monocromatico.

4^A LEZIONE 1° ESERCIZIO

Compattezza combinatoria

$\mathrm{I} \Leftrightarrow \mathrm{II}$

$\boxed{\mathrm{I} \Rightarrow \mathrm{II}}$ $\mathcal{F}$ famiglia di insiemi finiti r-regolare su $X \Rightarrow \exists Y \subset X$ finito t.c. $\mathcal{F}$ è r-regolare su Y. Allora per CMP I ho che siccome Y è finito, ci sono un numero finito di r-colorazioni possibili e quindi ci sono un numero finito di $A \in \mathcal{F}$ che soddisfano la condizione di r-regolarità su Y. Chiamo tale insieme di A, $\mathcal{F}_0$. $\mathcal{F}_0$ è una famiglia finita ed è r-regolare su X poiché lo è su un suo sottoinsieme Y.

$\boxed{\mathrm{II} \Rightarrow \mathrm{I}}$ Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di insiemi finiti r-regolare su X $\Rightarrow \exists \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ finita t.c. $\mathcal{F}_0$ è r-regolare su X. Per CMP II ho che $\mathcal{F}_0$ finita r-reg. su X. Quindi $\forall X = C_1 \cup \dots \cup C_r$ trovo $A \in \mathcal{F}_0$ ed i t.c. $A \subset C_i$. $\mathcal{F}_0$ ha un numero finito di A, e ciascun A è finito. $\bigcup A = Y$ è un sottoinsieme di X ed è finito. Ho che $\mathcal{F}_0$ è r-regolare su Y. A maggior ragione $\mathcal{F}$ è r-regolare su Y.

4^A LEZIONE 2° ESERCIZIO

(1) $\mathcal{F}$ é wPR su $X \Leftrightarrow \exists\, \mathcal{U}$ ultrafiltro su X t.c. $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$.

($\Leftarrow$) $\mathcal{U}$ ultrafiltro su X t.c. $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$. $X = C_1 \sqcup \dots \sqcup C_n$ finita, ma $X \in \mathcal{U}$

$\Rightarrow \exists i : C_i \in \mathcal{U} \subseteq \mathcal{F} \Rightarrow C_i \in \mathcal{F}$

($\Rightarrow$) $\mathcal{U} = \{ A \neq \emptyset$ ed $A \subset X \mid \exists$ una colorazione di $X = C_1 \sqcup \dots \sqcup C_n$ e c'é un i t.c. $A \subset C_i \}$

$\mathcal{U}$ é ultrafiltro? • $\emptyset \notin X$ per definizione; $X \notin X$, $n=2$ $X = X \sqcup \emptyset$ é una colorazione ed X sta dentro uno dei due colori.

• $A, B \in \mathcal{U} \overset{?}{\Rightarrow} A \cap B \in \mathcal{F}$ se $A \cap B \neq \emptyset$.

$A, B \in \mathcal{U} \Rightarrow X = C_1 \sqcup \dots \sqcup C_s$ ed $A \subset C_i$, $X = G_1 \sqcup \dots \sqcup G_n$ e $B \subset G_j$

Se $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow A \cap B \subset A \subset C_i \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{U}$.

• $A \in \mathcal{U}$ ed $A \subseteq B \overset{?}{\Rightarrow} B \in \mathcal{U}$. $A \in \mathcal{U} \Rightarrow \exists\ X = C_1 \sqcup \dots \sqcup C_n$ t.c. $\exists i : A \subset C_i$. $A \subset B \subset X$. Coloro

$$X = \underbrace{(C_i \cup (B \setminus A))}_{G_1} \sqcup \underbrace{(C_1 \sqcup \dots \sqcup C_{i-1} \sqcup C_{i+1} \sqcup \dots \sqcup C_n \setminus B)}_{= (C_1 \setminus B) \sqcup \dots \sqcup (C_n \setminus B)}$$

$$(C_1 \setminus B) \sqcup \dots \sqcup (C_n \setminus B), \quad C_1 \setminus B = G_2, \dots, C_n \setminus B = G_{n-1}$$

ho quindi una colorazione t.c. $B \subset G_1$

(2) $\mathcal{F}$ é PR $\Leftrightarrow \mathcal{F}$ é unione di ultrafiltri su X.

($\Leftarrow$) Sia $A \in \mathcal{F}$ $\forall A = C_1 \sqcup \dots \sqcup C_n$ ho che $A \in \mathcal{U}_i$ per un certo i
$\Rightarrow C_1 \sqcup \dots \sqcup C_n \in \mathcal{U}_i \Rightarrow \exists\ j$ t.c. $C_j \in \mathcal{U}_i \Rightarrow$ ho trovato $C_j \in \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{F}$ é PR

($\Rightarrow$) $\mathcal{F}$ é PR $\Rightarrow \forall A \in \mathcal{F}$, A é wPR $\Rightarrow$ c'é $\mathcal{U}_A \subseteq \mathcal{F}$ t.c. $\mathcal{U}_A$ é ultrafiltro su A.

($\subseteq$) Ma questo vale $\forall A \in \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{F} \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{F}} \mathcal{U}_A$

($\supseteq$) ovvio

4^A LEZIONE - Teo 3 colori

Sia $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ senza punti fissi. Allora $\exists\, C_1, C_2, C_3$ t.c.
$\forall n$ si ha che se $n \in C_i \Rightarrow f(n) \notin C_i$

DIM: CASO X infinito.

~~Sia $\Sigma = \{ Y \subset X \mid Y$ sia chiuso rispetto ad f ed abbia una "colorazione buona" $\}$~~

Diciamo che $Y_1 < Y_2$ se $Y_1 \subset Y_2$ e se la 3-colorazione di Y_2 ristretta ad Y_1 é uguale a quella di Y_1.

Prendiamo una catena di Σ: $(Y_j)_{j \in J} \Rightarrow Y = \bigcup_{j \in J} Y_j$ é un maggiorante e sta ancora in Σ: se $y \in Y \Rightarrow$ c'é j t.c. $y \in Y_j$ ed ho un tal colore c in $Y_j \Rightarrow$ ho lo stesso colore in Y.

Per Zorn ho M massimale. Se $M = X$ ho finito.

Se no c'é $x \in X \setminus M \Rightarrow Z = \{ b \mid \exists n \in \mathbb{N} : f^n(x) = b \}$, allora $Y \notin M$, cioé ci sono $\{ f^n(x), f^{(n+1)}(x) \}$ monocromatici in Y $\Rightarrow Y$ é 3-regolare $\Rightarrow$ per il Teo di compattezza combinatoria II ho che $\exists\, Y_0 \subset Y$, in questo caso Y_0 é del tipo finito che é 3-regolare su X, ma é impossibile per quanto dimostrato tra poco:

CASO X finito: se $|X| = 1$ ok

se $|X| = k \Rightarrow \{a_1, \dots, a_k\}$ e tra questi c'é un elemento che ha una sola controimmagine: $\bar{a}_i$.

$\Rightarrow \{a_1, \dots, a_k\} \setminus \{\bar{a}_i\}$ soddisfa l'ipotesi induttiva

$\Rightarrow$ assegno ad $\bar{a}_i$ il colore diverso da quello della sua immagine e controimmagine ∎

4^A LEZIONE

Verificare le operazioni di campo di $^*\mathbb{R}$:

$[\sigma] \in {}^*\mathbb{R}\ \exists [f], [g]$

f, g sono rappresentanti

associatività: $[\sigma] \pm ([f] \pm [g]) = [\sigma] \pm ([f \pm g]) =$

$= [\sigma \pm (f \pm g)] = [(\sigma \pm f) \pm g] = ([\sigma] \pm [f]) \pm [g]$

distributività: $([\sigma] + [f]) \cdot [g] = ([\sigma + f])[g] = [(\sigma + f) \cdot g] \overset{\text{in } \mathbb{R}}{=} [\sigma g + f g] =$

$= [\sigma g] + [f g] = [\sigma][g] + [f][g]$

inverso: $\forall [\sigma]\ \exists [\tau]$: $[\sigma] + [\tau] = 0$ o $[\sigma] \cdot [\tau] = 1$ infatti basta scegliere $[\tau]$ t.c. assume il valore opposto / inverso $\mathcal{U}$-q.o.

elemento 1: $[g] \cdot [c_1] = [g \cdot 1] = [g]$

elemento 0: $[g] + [c_0] = [g + 0] = [g]$

4^A LEZIONE ULTIMO ESERCIZIO

TFAE:

(1) $\mathbb{F}$ archimedeo

(2) $\mathbb{N}$ illimitato in $\mathbb{F}$

(3) $\mathbb{Q}$ " in $\mathbb{F}$

(4) $\neg\exists$ infinitesimi

$\boxed{1 \Rightarrow 4}$ Per assurdo $\exists\, \varepsilon$ t...

$-\frac{1}{n} < \varepsilon < \frac{1}{n} \quad \forall n$.

Ma $\mathbb{F}$ archimedeo $\Rightarrow \exists\, \bar{n}$ t.c.

$\bar{n} \cdot \varepsilon > 1$, cioè $\varepsilon > \frac{1}{\bar{n}}$ $\lightning$

$\boxed{4 \Rightarrow 1}$ $\nexists$ numeri infinitesimi, cioè $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \bar{n}$ t.c. $\varepsilon > \frac{1}{\bar{n}}$, cioè $\bar{n}\varepsilon > 1$.

$\boxed{4 \Rightarrow 2}$ Suppongo $\mathbb{N}$ limitato, cioè $\exists\, \eta$ t.c. $\forall n \in \mathbb{N}\ \eta > n$

cioè $\frac{1}{n} > \frac{1}{\eta} = \varepsilon \quad \forall n \Rightarrow \exists\, \varepsilon$ infinitesimo

$\boxed{2 \Rightarrow 4}$ Supponiamo che $\exists\, \varepsilon$ infinitesimo: $\forall n \quad -\frac{1}{n} < \varepsilon < \frac{1}{n}$

$\Rightarrow n < \frac{1}{\varepsilon} \quad \forall n$, cioè $\exists\, \mu = \frac{1}{\varepsilon}$ t.c. $\mathbb{N}$ è limitato

4^A LEZIONE ESERCIZIO

In $^*\mathbb{R}$ nessun insieme $^*\mathbb{R}$ è illimitato

- Se l'insieme è costituito da elementi di $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ basta prendere $\alpha = id$
- Se l'insieme è anche costituito da elementi di $^*\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}$ ho che se prendo tutti gli elementi e ne faccio la somma, ottengo un elemento più grande (in modulo) di tutti i precedenti:

$$X = \langle \sum_{i=1}^{\infty} |x_i(n)| \mid n \in \mathbb{N} \rangle$$

4^A LEZIONE ESERCIZIO

$^*\mathbb{Q}$:

- è ordinato poiché come in $^*\mathbb{R}$ posso suddividerlo in $(^*\mathbb{Q}, {}^*\mathbb{Q}^+)$
- è campo perché $\mathcal{U}$ massimale
- non è archimedeo poiché $\alpha = id > n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, cioè $\mathbb{N}$ è limitato

5^A LEZIONE 1° ESERCIZIO

$|^*\mathbb{N}| \geq c$: ogni $r \in \mathbb{R}$ si può scrivere come successione di numeri decimali $\Rightarrow$ $r = \ldots r_8 r_6 r_4 r_0, r_1 r_3 r_5 \ldots$

$$\exists \; v : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \qquad [v] \in {}^*\mathbb{N}$$
$$n \mapsto r_n$$

e ogni v dà luogo ad una classe di equivalenza distinta

5^A LEZIONE ESERCIZIO

$\lim a_n = l \iff \forall v \in {}^*\mathbb{N}$ infinito si ha che $a_v = {}^*a(v) \approx l$

($\Rightarrow$) se $\lim_n a_n = l \Rightarrow a_v = {}^*a(\underbrace{v(n)}_{\text{infinito } v_n}) = a$ (infinito)

$\quad \| $

${}^*a(v) = {}^*a \circ v \approx l$ per ipotesi poiché v infinito

($\Leftarrow$) $\forall v \in {}^*\mathbb{N}$ infinito $a_v = {}^*a(v) \approx l$

ho che $a_v \approx l$, ma questo vuol dire $\lim_n a_n = l$

5ª LEZIONE ESERCIZIO

(1) $^*(A\cap B) = {}^*A \cap {}^*B$: sia $[v]\in {}^*(A\cap B)$ con $v:\mathbb{N}\to A\cap B$

Poiché $\forall n\in\mathbb{N}$ $v(n)\in A$ ed $\mathbb{N}\in\mathcal{U}$, e $v(n)\in B$ $\forall n\in\mathbb{N}$, ho che

$[v]\in {}^*A$ e $[v]\in {}^*B$, dunque $[v]\in {}^*A\cap {}^*B$. Viceversa: leggere al contrario.

(2) $^*(A\cup B) = {}^*A\cup {}^*B$: $[v]\in {}^*(A\cup B) \Rightarrow v:\mathbb{N}\to A\cup B$ ed $X=\{n \mid v(n)\in A\}$

e $Y=\{n \mid v(n)\in B\}$. $X\cup Y=\mathbb{N}\in\mathcal{U} \Rightarrow$ o $X\in\mathcal{U}$ o $Y\in\mathcal{U}$

$\Rightarrow$ $[v]\in {}^*A$ o $[v]\in {}^*B$

(3) $[v]\in {}^*(A\setminus B)$ $v:\mathbb{N}\to A\setminus B$ un rappresentante.

$\forall n\in\mathbb{N}$ $v(n)\in A\setminus B \Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}$ $v(n)\in A$ ed $\mathbb{N}\in\mathcal{U}$ e $\neg\exists n$; $v(n)\in B$

$\Rightarrow \emptyset$. Ma $\emptyset\notin\mathcal{U}$ $\Rightarrow$ $v\in {}^*A$ ma $v\notin {}^*B \Rightarrow [v]\in {}^*A\setminus {}^*B$

(4) $[v]\in {}^*(A\times B)$ $v:\mathbb{N}\to A\times B$
$n\longmapsto (v_1(n), v_2(n))$

$A_1=\{n \mid v_1(n)\in A\}=\mathbb{N}\in\mathcal{U}$

$B_2=\{n \mid v_2(n)\in B\}=\mathbb{N}\in\mathcal{U}$

$\Rightarrow [v_1]\in {}^*A$ e $[v_2]\in {}^*B$ $[v] = ([v_1]\times[v_2]) \in {}^*A\times {}^*B$

6ª LEZIONE ESERCIZIO

$[1,v]\geq c$ per $v\in {}^*\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$.

Con il Transfer : $\underbrace{A\subseteq\mathbb{N} \text{ infinito} \Rightarrow |A|=|\mathbb{N}|}$

$\Downarrow$

$[1,v]\subset {}^*\mathbb{N} \Rightarrow |[1,v]| = |{}^*\mathbb{N}| = c$

6ª LEZIONE, ESERCIZIO

Gli insiemi interni sono chiusi per: $\cap$, $\cup$, complemento e Δ

- Sia $A\subset {}^*\mathbb{N}$ interno $\Rightarrow \exists A_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$ t.c. $[\xi]\in A$ sse $\{n \mid \xi(n)\in A_n\}\in\mathcal{U}$. Prendo ξ t.c. $\{n \mid \xi(n)\in A_n^c\}\in\mathcal{U}$

e prendo l'insieme di tali ξ, che chiamo A^c; verifichiamo che lo sia effettivamente. Se per assurdo $\exists\ \xi \in A \cap A^c$, avrei che

$\{n \mid \xi_{(n)} \in A^c\} \cup \{n \mid \xi_{(n)} \in A\} = \mathbb{N} \Rightarrow$ o $\xi \in A$ o $\xi \in A^c$

Quindi $\forall \xi \in A^c$ ho trovato B_n $(= A_n^c)$ t.c. $\xi \in [\langle A_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle]$

- $\cap$: A, B interni $\rightsquigarrow$ A_n, B_n. $A \cap B$ è interno?

$$\xi \in A \cap B \Rightarrow \begin{array}{l} A' = \{n \mid \xi_{(n)} \in A\} \in \mathcal{U} \\ B' = \{n \mid \xi_{(n)} \in B\} \in \mathcal{U} \end{array} \Rightarrow A', B' \in \mathcal{U} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A' \cap B' \in \mathcal{U}$$

cioè $\{n \mid \xi_{(n)} \in A_n \cap B_n\} \in \mathcal{U}$

VICEVERSA: leggere al contrario

- $\cup$: $\xi \in A \cup B \Rightarrow$ o $A' = \{n \mid \xi_{(n)} \in A_n\} \in \mathcal{U}$

o $B' = \{n \mid \xi_{(n)} \in B_n\} \in \mathcal{U}$

ma $B', A' \subseteq A' \cup B' \Rightarrow A' \cup B' \in \mathcal{U}$

$\Rightarrow \{n \mid \xi_{(n)} \in A_n \cup B_n\} \in \mathcal{U}$.

D'altra parte se $\{n \mid \xi_{(n)} \in A_n \cup B_n\} \in \mathcal{U} \Rightarrow C_n = A_n \cup B_n$

$\Rightarrow [\xi] \in A \cup B \Leftrightarrow \{n \mid \xi_n \in A_n \cup B_n\} \in \mathcal{U}$

- Δ: differenza simmetrica. A, B interni.

$A \Delta B = A \setminus B \cup B \setminus A$. Ma unione di interni è interna

$\Rightarrow$ basta vedere che $A \setminus B$ è interno.

Ma $A \setminus B = A \cap B^c$.

6^a LEZIONE ESERCIZIO

- $\lim_n a_n = l \in \mathbb{R} \iff \forall v$ infinito $a_v \sim l$

($\Rightarrow$) se $\lim_n a_n = l$ vuol dire che $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n}$ t.c. $\forall n > \bar{n} \ |a_n - l| < \varepsilon$.

Se $v \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ ho che $\forall \bar{m} \ \exists \bar{\bar{m}} : \forall n > \bar{\bar{m}} \quad v(n) > \bar{m}$

$\{n \mid v(n) > m\} \in \mathcal{U}$. Poiché $\forall \frac{1}{n} \ \exists \bar{n} : \forall m > \bar{n} \ |a_m - l| < \frac{1}{n}$

ho che se $v \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ (cioè $\forall \bar{n} \ \{n \mid v(n) > \bar{n}\} \in \mathcal{U}$)

$\Rightarrow$ ho che $\forall n \ \{m \mid |l - a(v(m))| < \frac{1}{n}\} \in \mathcal{U}$ cioè $l \sim a_v$

($\Leftarrow$) D'altra parte se $a_v \sim l \Rightarrow a_v = l +$ infinitesimo

cioè $|a_v - l| \leq \frac{1}{n} \quad \forall n$, ma questo è la def di limite

- $\limsup a_n \geq l \iff \exists v \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ t.c. $st(a \circ v) \geq l$

($\Rightarrow$) vuol dire che può esistere un insieme di elementi di

$\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ per i quali si ha che $a_n < l$.

Questo vuol dire che se prendo $v : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$n \longmapsto \begin{cases} n & \text{se } a_n \geq l \\ \min\{m \mid m > n \text{ ed } a_m \geq l\} & \text{se } a_n < l \end{cases}$$

Quindi abbiamo che $st(a \circ v) \geq l$

poiché $\{n \mid (a \circ v)(n) \geq l\} = \mathbb{N} \in \mathcal{U}$

($\Leftarrow$) $\exists v : st(a \circ v) \geq l \Rightarrow \{n \mid a(v(n)) \geq l\} \in \mathcal{U}$

con $v : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ t.c. $\forall m \ \{n \mid v(n) > m\} \in \mathcal{U}$

Dunque $\{n \mid (a \circ v)(n) < l\} \notin \mathcal{U}$

Allora poiché v infinito ho che anche $a_n \geq l$ per

un numero infinito di $n \Rightarrow \limsup a_n \geq l$

ESERCIZIO 6^A LEZIONE

$f: I \to J$, $\mathcal{U}$ ultrafiltro su I. $f_*(\mathcal{U}) = \{ A \subset J \mid f^{-1}(A) \in \mathcal{U} \}$ è un ultrafiltro su J

Dico che $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$ se $\exists f : f(\mathcal{V}) = \mathcal{U}$

- $\underbrace{\mathcal{U} \leq \mathcal{V}}_{\Downarrow} \underbrace{\leq \mathcal{W}}_{\Downarrow} \Rightarrow \mathcal{U} \leq \mathcal{W}$

$\exists f$: $f_*(\mathcal{V}) = \mathcal{U}$ $\quad \exists g$: $g_*(\mathcal{W}) = \mathcal{V}$ $\quad$ Allora $f \circ g$ è t.c.

$f_* \circ g_* (\mathcal{W}) = \mathcal{U}$, cioè $\mathcal{W} \geq \mathcal{U}$

- $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$ e $\mathcal{V} \leq \mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{U} \cong \mathcal{V}$

$\Downarrow \quad \Downarrow$

$\exists \sigma : \sigma_*(\mathcal{V}) = \mathcal{U} \qquad \exists \tau : \tau_*(\mathcal{U}) \geq \mathcal{V}$

$\Rightarrow \tau_* \sigma_* (\mathcal{V}) = \mathcal{V}$

cioè $\{ A \mid (\tau \circ \sigma)^{-1}(A) \in \mathcal{V} \} = \mathcal{V}$

e analogamente per $\sigma_* \tau_* (\mathcal{U}) = \mathcal{U}$

cioè $\sigma_* \tau_* = id_u$

e $\tau_* \sigma_* = id_v$

Dunque $\sigma_* \tau_*$ e $\tau_* \sigma_*$ sono una inversa dell'altra

ESERCIZIO 6^A LEZIONE

Uniforme C^0 di $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$\forall \xi \sim \eta \quad {}^*f(\xi) \sim {}^*f(\eta)$?

se $st(\xi) = x = st(\eta) \Rightarrow {}^*f(\xi) \sim f(x) \sim {}^*f(\eta)$

per C^0 di f

ESERCIZIO 6^A LEZIONE

Esercizio su $\bar{d}(A)$:

$\Delta(A) = \{ h \mid \exists h', h'' \in A : h = h' - h'' \}$

poiché $\bar{d}(A) > 0$, cioè $\exists \nu$ infinito t.c. $\dfrac{|{}^*A \cap [1, \nu]|}{\nu} \sim \alpha$

Allora ... il Teorema delle differenze

7^A LEZIONE ESERCIZIO

$\{a_n\}$ successione di reali, $\limsup a_n = l \Rightarrow \exists\, \nu \in {}^*\mathbb{N}$ infinito t.c. $a_\nu \sim l$

DIM: poiché $\limsup a_n = l \Rightarrow \exists \{n \mid a_n \neq l\}$

allora prendo $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ t.c.

$$\nu(n) = \begin{cases} n & \text{se } a_n = l \\ \min\{m \mid m > n \text{ e } a_m = l\} & \text{se } a_n \neq l \end{cases}$$

Allora $a_\nu \sim l$ poiché $\{n \mid a_\nu = l\} = \mathbb{N} \in \mathcal{U}$

7^A LEZIONE ESERCIZIO

$\overline{d}(A) = \alpha \Leftrightarrow \alpha$ é il max tra i valori di $st\left(\frac{|{}^*A \cap [1,N]|}{N}\right)$

$\Rightarrow$ $\overline{d}(A) = \alpha \Rightarrow \exists\, \nu$ infinito t.c. $a_\nu \sim l$

$\limsup \underbrace{\frac{|{}^*A \cap n|}{n}}_{a_n} \overset{!}{=} \Rightarrow \exists\, \nu : st\, \frac{|{}^*A \cap \nu|}{\nu} \sim \alpha$

per ν infinito

supponiamo che $\exists\, \eta \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ t.c.

$st\left(\frac{|{}^*A \cap \eta|}{\eta}\right) > \alpha \Rightarrow \limsup a_n > \alpha$ ↯

$\Leftarrow$ se α é il massimo tra i valori $st\left(\frac{|{}^*A \cap [1,N]|}{N}\right)$ con

N infinito $\Rightarrow \limsup\left(\frac{|{}^*A \cap [1,n]|}{n}\right) = \alpha$

$$\limsup\left(\frac{|{}^*A \cap [1,n]|}{n}\right) = \overline{d}(A)$$

7^A LEZIONE ESERCIZIO

$A \subset {}^*\mathbb{N}$ è interno. A è iperinfinito $\Leftrightarrow \exists f : A \to {}^*\mathbb{N}$ biiezione interna

($\Leftarrow$) $f : A \to {}^*\mathbb{N}$ biiezione, cioè $\forall \xi \in A$ trovo un unico corrispondente $\xi' \in {}^*\mathbb{N}$. Poiché la cardinalità di ${}^*\mathbb{N}$ è c, se gli A_n (che per ora assumiamo tutti uguali ad A) fossero finiti, allora avrei che potrei ottenere solo un numero $\aleph_0$ di funzioni. Per ottenere di più ho bisogno che gli A_n siano tutti infiniti.

($\Rightarrow$) A iperinfinito $\Rightarrow A_n$ infinito $\Rightarrow$ l'insieme delle funzioni di A sono almeno $\geq c$. Ma c è la cardinalità di ${}^*\mathbb{N}$ $\Rightarrow$ posso trovare una biiezione

7^A LEZIONE ESERCIZIO

Δ^* è un filtro

$$\Delta^* = \{ A \mid \forall X \text{ infinito si ha che } A \cap \Delta(X) \neq \emptyset \}$$

(1) ${}^*\mathbb{N} \in \Delta^*$ ovvio

(2) se $A \in \Delta^* \Rightarrow \forall B$ t.c. $A \subset B$ si ha che $B \in \Delta^*$, ovvio

(3) $A, B \in \Delta^* \Rightarrow \forall X$ infinito ho che $A \cap \Delta(X) \neq \emptyset$ e $B \cap \Delta(X) \neq \emptyset$, ma vale ancora che $A \cap B \cap \Delta(X) \neq \emptyset$

infatti suddivido $\mathbb{N} = \underbrace{(A \cap B \cap \Delta(X))}_{C_1} \cup \underbrace{(A \cap B \cap \Delta(X))^c}_{C_2}$

7ª LEZIONE ESERCIZIO

$BD(A) = 1 \iff A$ é spesso

$\Rightarrow$ Vuol dire che per infiniti n crescenti, A contiene intervalli di lunghezza n $\Rightarrow$ A é spesso

$\Leftarrow$ A é spesso $\Rightarrow$ $\forall k$ esiste un intervallo contenuto in A di dimensione k. Posso scegliere gli intervalli fatti come

$[x+1, x+n]$ con $x \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \forall n$ c'é un $x \in \mathbb{Z}$ t.c. $[x+1, x+n] \subset A \Rightarrow BD(A) = 1$

8ª LEZIONE ESERCIZIO

$A \cap B = \emptyset$

$\liminf a_n + \liminf b_n \leq \liminf a_n + b_n$

$$\underline{d}(A) + \underline{d}(B) = \liminf_n \left(\frac{|A \cap [1,n]|}{n}\right) + \liminf_n \left(\frac{|B \cap [1,n]|}{n}\right) \leq$$

$$\leq \liminf_n \frac{|(A \cup B) \cap [1,n]|}{n} = \liminf \left(\frac{|A \cap [1,n]|}{n} + \frac{|B \cap [1,n]|}{n}\right) \leq$$

$$\leq \limsup \frac{|A \cap [1,n]|}{n} + \liminf_n \frac{|B \cap [1,n]|}{n} \leq$$

$\liminf \leq \limsup$

- nel caso in cui:
  $\begin{cases} \liminf A_n < \limsup A_n \\ \liminf B_n < \limsup B_n \end{cases}$
  é indifferente scegliere A_n o B_n
- nel caso in cui uno dei due é tale che $\limsup = \liminf$ (ad esempio facciamo per B_n)
  $\Rightarrow \underline{d}(A \cup B) \leq \overline{d}(A) + d(B)$

$$\leq \limsup \left(\frac{|(A \cup B) \cap [1,n]|}{n}\right) \leq$$

- se $\limsup B_n = \liminf B_n$ allora $\limsup A_n + B_n = \limsup A_n + \limsup B_n$
- se invece anche $\liminf B_n < \limsup B_n$ allora $\limsup A_n + \liminf B_n \leq \limsup(A_n + B_n)$

$\limsup(A \cup B) \leq \limsup A + \limsup B$

$$\leq \overline{d}(A) + \overline{d}(B)$$

8^A LEZIONE ESERCIZIO

Per ogni $X = \{x_1 < x_2 < \dots\}$ infinito trovare una bicolorazione $[\mathbb{N}]^2 = C_1 \cup C_2$ t.c. ogni $H = \{h_1 < h_2 < \dots\}$ infinito, omogeneo abbia densità nulla rispetto ad X : $\lim \frac{|H \cap [1,n)|}{|X \cap [1,n)|} = 0$

[tranne nel caso patologico in cui $X = \mathbb{N} = H$], ho che $\mathbb{N} = \bigcup [x_n, x_{n+1})$. Allora prendo una colorazione t.c. una coppia $(a,b) \in C_1$ se a, b appartengono a due intervalli diversi. Ogni insieme omogeneo infinito deve quindi avere al più un elemento in ogni intervallo della partizione.

$\Rightarrow H \cap [1,n) \leq X \cap [1,n)$

8^A LEZIONE ESERCIZIO

(I) A interno che contiene ipernaturali infiniti arbitrariamente piccoli, allora $A \cap \mathbb{N} \neq \phi$

DIM: Se no A non HA minimo, mentre gli insiemi interni ammettono sempre minimo.

(II) $\forall \xi$ infinito $[\xi, +\infty) \subseteq A$, con A interno, allora $\exists n \in \mathbb{N} : [n, +\infty) \subseteq A$

DIM: Poiché gli interni sono chiusi per complementazione ho che anche $[\xi, +\infty)$ è interno.

A interno $\Rightarrow B = \{\xi \in {}^*\mathbb{N} \mid [1, \xi] \subseteq A\}$ è interno

ma in questo caso ho $\overline{B} = \{\xi \in {}^*\mathbb{N} \mid [\xi, +\infty) \subseteq A\}$ è anch'esso interno

ma A contiene tutti gli ξ infiniti $\Rightarrow \overline{B}$ ha bisogno di $n \in \mathbb{N}$ t.c. sia minimo $\Rightarrow \exists\, n^{\in \mathbb{N}} \in \overline{B} \Rightarrow [n, +\infty] \subseteq A$ per definizione di B

ESERCIZIO 8ª LEZIONE

TFAE:

(1) A é spesso

(2) $\exists\, I \subseteq {}^*A$ intervallo infinito (cioé: $I = [\nu, \mu]$ con $\mu - \nu$ infinito)

(3) $\forall \nu \in {}^*\mathbb{N}$ $\exists\, |I| = \nu$ intervallo di lunghezza ν con $I \subseteq {}^*A$

(4) $\exists\, \xi \in {}^*\mathbb{N}$ t.c. $\xi + n \in {}^*A$ $\forall n \in \mathbb{N}$

DIM: (1) $\Longleftrightarrow$ (3) per TRANSFER

(3) $\Rightarrow$ (2) basta scegliere $\nu \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$

(2) $\Rightarrow$ (4) se $\exists\, I$ intervallo infinito in A, prendendo l'estremo inferiore dell'intervallo, che chiamo ξ, ho che $\forall n$ $\xi + n \in {}^*A$

(4) $\Rightarrow$ (1) Per transfer $\exists\, \bar{\xi} \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n$ $\bar{\xi} + n \in A$ cioé A é spesso

9ª LEZIONE ESERCIZIO

TFAE: (1) B é sindetico

(2) ${}^*B$ non ha buchi infiniti, cioé $\forall I$ intervallo infinito, $I \cap B \neq \emptyset$

(3) $\exists\, K \in \mathbb{N}$: ${}^*B$ ha solo buchi di ampiezza $\leq K$

(4) $\forall \xi$ $A_\xi \neq 0$

DIM: é il contronominale dell'esercizio precedente

9^A LEZIONE ESERCIZIO

$A \subseteq \mathbb{Z}$ é sindetico sse $\exists F \subset \mathbb{Z}$ finito t.c. $A + F = \mathbb{Z}$

($\Rightarrow$) A sindetico $\Rightarrow \exists\, k$ t.c. $\forall n \geq k$ ed I intervallo con $|I| \geq n$ si ha che $I \cap A \neq \emptyset$. Se prendo $F = \{0, 1, \dots, k\}$ finito ho che $\bigcup_{x \in F} A + x = A \cup A+1 \cup \dots \cup A+k = \mathbb{Z}$

($\Leftarrow$) Se $\exists\, F \subset \mathbb{Z}$ finito t.c. $A + F = \mathbb{Z} = \bigcup_{x \in F} A + x$

ora prendo $\max(F) = \bar{z} \Rightarrow \forall n > \bar{z}$ ho che se I é intervallo con $|I| = n \Rightarrow I \cap A \neq \emptyset$, cioé A é sindetico

9^A LEZIONE ESERCIZIO

($\Rightarrow$) A é spesso $\Rightarrow$ fisso F finito di $\mathbb{Z}$. F sará contenuto in un intervallo finito di $\mathbb{Z}$ di cardinalitá k. Ma poiché A é spesso ho che, dato k ho che $\exists\, F'$ intervallo contenuto in $A \Rightarrow$ traslo F in F'.

($\Leftarrow$) Fisso F finito, F ha cardinalitá k ed ho che c'é x t.c. $x + F \subseteq A$. Questo vale anche nel caso in cui F é un intervallo, cioé A é spesso.

9^A LEZIONE ESERCIZIO

A é sindetico a tratti sse $\left(\exists k \in \mathbb{N}\ \forall n\ \exists |I| = n\ \forall x \in A \cap I\ [x+1, x+k] \cap A \neq \emptyset\right) \Longleftrightarrow \left(\exists\, I \text{ infinito t.c. } {}^*A \cap I \text{ ha buchi finiti}\right)$

($\Leftarrow$) Sia k la grandezza massima del buco tra ${}^*A \cap I$, allora fisso n e scelgo $|J| = n$. Prendo $x \in {}^*A \cap J \cap I \Rightarrow [x+1, x+k] \cap {}^*A \cap I \neq \emptyset$

$\Rightarrow$ a maggior ragione $[x+1, x+k) \cap {}^*A \neq \emptyset$; questo vale anche nel caso di $A \Rightarrow$ OK