Esercizi lezione 11/5/15, Andrea Vaccaro

20 maggio 2015

Proposizione 0.1. *Il fatto che $\mathcal{F} = \mathcal{F}^*$ non implica che $\mathcal{F}$ sia un ultrafiltro.*

Dimostrazione. Consideriamo un ultrafiltro U. Se consideriamo $\mathcal{F} = (U \setminus \{\mathbb{N}\}) \cup \{\emptyset\}$ allora si ottiene che ovviamente $\mathcal{F}$ non è un ultrafiltro (contiene $\emptyset$ e non contiene $\mathbb{N}$), però verifica $\mathcal{F} = \mathcal{F}^*$: se $A \in \mathcal{F}$ è diverso dall'insieme vuoto, allora $A \in \mathcal{F} \Leftrightarrow A^c \notin \mathcal{F}$ per le proprietà di ultrafiltro, se invece $A = \emptyset$, vale che $A \in \mathcal{F}^*$ perchè $\mathbb{N} \notin \mathcal{F}$. $\square$

Proposizione 0.2. *Verificare che, se F è un filtro e C è un chiuso di $\beta\mathbb{N}$ allora $F_{C_F} = F$ e $C_{F_C} = C$.*

Dimostrazione. Dato un filtro F, si verifica che C_F è l'insieme di tutti gli ultrafiltri che estendono F, infatti se $U \in C_F$ allora per ogni $A \in F$ vale $A \in U$, se invece $U \notin C_F$ esiste $A \in F$ tale che $A \notin U$, e quindi U non può estendere F. Detto questo, poiché ogni filtro è uguale all'intersezione di tutti gli ultrafiltri che lo contengono, vale, per quanto osservato prima, che $F = F_{C_F}$. Infatti da un lato F è chiaramente contenuto nell'intersezione di tutti gli ultrafiltri che lo contengono, dall'altro, se ci fosse un insieme A in tale intersezione non appartenente ad F, vorrebbe dire che ogni ultrafiltro che estende F dovrebbe contenere tale A. Ma allora $F \cup \{A^c\}$ non gode della proprietà dell'intersezione finita, cioè esiste una famiglia finita in F la cui intersezione è disgiunta da A^c. Questo significa che A contiene tale intersezione, che però è un elemento di F. Ma allora $A \in F$.

$C_{F_C} = \bigcap_{A \in \bigcap_{V \in C} V} \mathcal{O}_A = \{U \in \beta\mathbb{N} : \text{ se } A \in V \text{ per ogni } V \in C \Rightarrow A \in U\} \supseteq C$. Viceversa se $U \notin C = \bigcap_{i \in I} \mathcal{O}_{A_i}$, allora esiste un A_j tale che $A_j \notin U$; vale però che $A_j \in V$ per ogni $V \in C$, e dunque non può essere $U \in C_{F_C}$. $\square$

Proposizione 0.3. *Sia* $A = \{a_1 < a_2 < \cdots\}$ *una successione tale che* $a_{n+1} - a_n \to \infty$ *per* $n \to \infty$. *Vale alora che* $A \notin U \oplus V$ *per ogni* U, V *ultrafiltri non principali.*

Dimostrazione. Supponiamo U, V non principali e $A \in U \oplus V$. Dal momento che U è non principale, l'insieme $\hat{A} = \{m : A - m \in V\} \in U$ ha almeno due elementi, diciamo $m_1 < m_2$. Poiché anche V è non principale, si hanno due insiemi infiniti $A - m_1$ e $A - m_2$ in V, e così anche la loro intersezione, che chiameremo B. Per ogni elemento $j \in B$, vale $j + m_1 \in A$ e $j + m_2 \in A$; per ipotesi, esiste N tale che per ogni $n > N$ vale $a_{n+1} - a_n > m_2 - m_1$. Dal momento che B è infinito, esiste $j \in B$ tale che $j > a_N$, e poiché $j \in B$ vale che $j + m_1 \in A$ così come $j + m_2$. Ciò è però assurdo, in quanto la distanza fra $a_k = j + m_1$ e $a_{k+1} \leq j + m_2$ è minore di $m_2 - m_1$, nonostante $k > N$ (che vale poiché $a_k > a_N$ e A è ordinato in modo crescente). $\square$

Proposizione 0.4. *Verificare che l'insieme* $(\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}) \oplus (\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N})$ *è raro.*

Dimostrazione. Per mostare che è raro mostriamo che il complementare della sua chiusura è denso. Dal momento che abbiamo già mostrato in esercizi precedenti che $\overline{\mathbb{N}} = \beta\mathbb{N}$, basta mostrare che in $\overline{(\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}) \oplus (\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N})}$ vi siano solo ultrafiltri non principali. Premesso che se U e V sono ultrafiltri non principali anche $U \oplus V$ non è principale, consideriamo $W \in \overline{(\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}) \oplus (\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N})}$. Se W fosse principale, allora $W \in \mathcal{O}_{\{n\}}$ per un certo $n \in \mathbb{N}$, ma poiché W è nella chiusura di $(\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}) \oplus (\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N})$, devono esistere U e V non principali tali che $U \oplus V \in \mathcal{O}_{\{n\}}$, il che è assurdo perché implicherebbe $U \oplus V$ principale. $\square$