# Dinamica topologica

Nota

la soluzione di questo esercizio e del prossimo mi sono stati suggeriti da Marco Usula.

<u>Esercizio</u>

$x$ è ricorrente $\iff$ $\forall U$ intorno di $x$, $orb(x) \cap U$ è infinito

<u>Soluzione</u>

$\Leftarrow$ ovvio

$\Rightarrow$ Dimostro che se $x$ è ricorrente anche $Tx$ è ricorrente: sia $U$ intorno di $Tx$, allora per continuità di $T$, $T^{-1}(U)$ è intorno di $x$ e per ricorrenza di $x$ esiste $n$ tale che $T^n x \in T^{-1}(U)$, ovvero $T^{n+1}x \in U$. Allora se $V$ è un intorno di $x$, per ricorrenza esiste $n>0$ con $T^n x \in V$; per ricorrenza di $T^n x$ esiste $m>0$ tale che $T^{n+m}x \in V$ e così via.

Nota

va assunta la non periodicità di $x$.

<u>Esercizio</u>

$x$ è ricorrente $\iff$ $\exists \nu \in {}^*\mathbb{N}$ infinito tale che $T^\nu x \approx x$

<u>Soluzione</u>

$\Leftarrow$ ovvio

$\Rightarrow$ Sia $U$ intorno di $x$ e sia $\hat{U} = \{n \mid T^n x \in U\}$. L'insieme $\{\hat{U} \mid U \text{ intorno di } x\}$ ha la FIP, infatti: $\hat{U}_1 \cap \dots \cap \hat{U}_k \supseteq \widehat{(U_1 \cap \dots \cap U_k)}$ che è non vuoto per ricorrenza di $x$. Allora, assumendo $\kappa$-enlargement per $\kappa$ sufficientemente grande, trovo $\nu \in \bigcap \{{}^*\hat{U} \mid U \text{ intorno di } x\}$ e questo è tale che $T^\nu x \in U$ per ogni intorno $U$ di $x$, cioè $T^\nu x \approx x$.

$A_U = \{n \mid T^n x \in U\}$ $\leadsto$ $\{A_U : U \text{ intorno di } x\}$ ha FIP perché $A_{U_1} \cap \dots \cap A_{U_k} \supseteq A_{U_1 \cap \dots \cap U_k}$ ed è non vuoto perché ricorrente. Allora per $\kappa$-enlargement l'intersezione è non vuota.

## Esercizio

$T_\nu(x) = \mathcal{U}_\nu\text{-}\lim_n T^n x$

## Soluzione

Sia $y \in X$. $y = T_\nu(x) \iff T^\nu(x) \in \bigcap_{U \text{ intorno di } y} {}^*U \iff \forall U$ intorno di $y$ $T^\nu(x) \in {}^*U$.

D'altro canto $y = \mathcal{U}_\nu\text{-}\lim T^n x \iff \forall U$ intorno di $y$ $\nu \in {}^*\{n \mid T^n x \in U\} \iff$

$\iff \forall U$ intorno di $y$ $T^\nu(x) \in {}^*U$

## Esercizio

$T_\mu(T_\nu(x)) = (\mathcal{U}_\mu \oplus \mathcal{U}_\nu)\text{-}\lim T^n x$

## Soluzione

$y = T_\mu(T_\nu(x)) \iff T^\mu(T^\nu(x)) \in \bigcap_{U \text{ intorno di } y} {}^*U \iff \forall U$ intorno di $y$ $T^{\nu+\mu}(x) \in {}^*U$

D'altro canto, $y = (\mathcal{U}_\mu \oplus \mathcal{U}_\nu)\text{-}\lim T^n x \iff \forall U$ intorno di $y$ $A_U = \{n \mid T^n(x) \in U\} \in \mathcal{U}_\mu \oplus \mathcal{U}_\nu \iff$

$\forall U$ intorno di $y$ $\hat{A}_U = \{m \mid A_U - m \in \mathcal{U}_\nu\} \in \mathcal{U}_\mu$ con $A_U - m = \{p \mid T^{p+m}(x) \in U\} \iff$

$\iff \mu \in {}^*\hat{A}_U = {}^*\{m \mid \nu \in {}^*\{p \mid T^{p+m}(x) \in U\}\} \iff T^{\nu+\mu} \in {}^*U$

## Esercizio

Sia $\gamma \in {}^*\mathbb{N}$. TFAE

1) $\gamma$ è ricorrente in $({}^*\mathbb{N}, {}^*S)$

2) $\exists \mu$ (infinito) $S_\mu(\gamma) = \gamma$

3) $\mathcal{U}_\gamma \in \beta\mathbb{N} \oplus \mathcal{U}_\gamma$ cioè esiste $\mathcal{V}$ $\mathcal{V} \oplus \mathcal{U}_\gamma = \mathcal{U}_\gamma$.

## Soluzione

1⇒2) Esiste $\nu \in {}^*\mathbb{N}$ infinito tale che $S^\nu(\gamma) \approx \gamma$. Ma $S^\nu\gamma \approx S_\nu\gamma$ e quindi $S_\nu(\gamma) = \gamma$.

2⇒3) Sia $\mathcal{V} = \mathcal{U}_\mu$. Allora $\mathcal{U}_\gamma = \mathcal{U}_\mu \oplus \mathcal{U}_\gamma$, infatti $A \in \mathcal{U}_\gamma \iff \gamma \in {}^*A$ e $A \in \mathcal{U}_\mu \oplus \mathcal{U}_\gamma$ sse $\hat{A} = \{n \mid A - n \in \mathcal{U}_\gamma\} \in \mathcal{U}_\mu \iff \mu \in {}^*\{n \mid \gamma \in {}^*A - n\} \iff \mu \in {}^*\{n \mid \gamma + n \in {}^*A\} \iff \gamma + \mu \in {}^*A$

$\iff \gamma = S^\mu(\gamma) \in {}^*A$

3⇒1) Sia $\mathcal{V}$ t.c. $\mathcal{V} \oplus \mathcal{U}_\gamma = \mathcal{U}_\gamma$. Sia $U$ intorno di $\gamma$, WLOG $U = {}^*A$ con $A \in \mathcal{U}_\gamma$ (intorno di base). $A \in \mathcal{V} \oplus \mathcal{U}_\gamma$ e quindi $\{n \mid \gamma + n \in {}^*A\} \in \mathcal{V}$ ed è dunque <u>non</u> vuoto.