Esercizio:
La famiglia degli insiemi interni è chiusa per:

(1) unione

(2) intersezione

(3) passaggio al complementare

(4) differenza simmetrica

Dimostrazione:
Siano A e B due insiemi interni. Allora esistono $\alpha = [\langle A_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle]$ e $\beta = [\langle B_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle]$ con $A_n, B_n \subseteq \mathbb{R}$ per ogni n, tali che

$$[\sigma] \in A \iff [\sigma] \in \alpha$$
$$[\sigma] \in B \iff [\sigma] \in \beta.$$

(1) Poiché $\mathcal{U}$ è un ultrafiltro, valgono le seguenti equivalenze:

$$\begin{aligned}[\sigma] \in A \cup B &\iff [\sigma] \in A \vee [\sigma] \in B \\ &\iff [\sigma] \in \alpha \vee [\sigma] \in \beta \\ &\iff [\sigma] \in [\langle A_n \cup B_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle].\end{aligned}$$

Ossia $A \cup B$ è interno.

(2) Valgono:

$$\begin{aligned}[\sigma] \in A \cap B &\iff [\sigma] \in A \wedge B \\ &\iff [\sigma] \in \alpha \wedge [\sigma] \in \beta \\ &\iff [\sigma] \in [\langle A_n \cap B_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle].\end{aligned}$$

Ossia $A \cap B$ è interno.

(3) Siano A interno ed α come sopra e facciamo vedere che A^c è interno. Valgono:

$$\begin{aligned}[\sigma] \in A^c &\iff [\sigma] \notin \alpha \\ &\iff [\sigma] \in [\langle A_n^c \mid n \in \mathbb{N}\rangle].\end{aligned}$$

(4) Siano A, B interni e α, β come sopra. Facciamo vedere che $A \bigtriangleup B$ è interno. Osserviamo semplicemente che

$$A \bigtriangleup B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \cap (A \cap B)^c.$$

Ma per quanto dimostrato $A \cup B$ è interno come anche $A \cap B$ e il suo complementare. Dunque poiché si tratta di un'intersezione di interni, anche $A \bigtriangleup B$ è interno.

$\square$

Ricordiamo che dati $f : I \to J$ e un ultrafiltro $\mathcal{U}$ su I, la famiglia di insiemi

$$f_*(\mathcal{U}) = \{A \subseteq J \mid f^{-1}(A) \in \mathcal{U}\}$$

è un ultrafiltro su J.

Esercizio:
Sia $\mathcal{U}$ un ultrafiltro su $\mathbb{N}$ ed $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Allora

$$f_*(\mathcal{U}) = \mathcal{U} \iff B = \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) = n\} \in \mathcal{U}.$$

Dimostrazione:

($\Leftarrow$) Facciamo vedere che $f_*(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{U}$ (otteniamo quindi l'uguaglianza poiché stiamo lavorando con ultrafiltri). Sia $A \in f_*(U)$, ossia $f^{-1}(A) \in \mathcal{U}$. Per ipotesi $B \in \mathcal{U}$, quindi

$$f^{-1}(A) \cap B \in \mathcal{U}.$$

Ma $A \supseteq f^{-1}(A) \cap B$, dunque $A \in \mathcal{U}$.

($\Rightarrow$) Supponiamo per assurdo che $B \notin \mathcal{U}$. Quindi, poiché $\mathcal{U}$ è un ultrafiltro, $B^c = \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) \neq n\} \in \mathcal{U}$. Dunque $f \equiv_{\mathcal{U}} g$ con $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ senza punti fissi. Inoltre, poiché per ipotesi $f_*(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$, vale

$$g_*(\mathcal{U}) = f_*(\mathcal{U}) = \mathcal{U}.$$

Consideriamo infatti $A \subseteq \mathbb{N}$. Se $g^{-1}(A) \in \mathcal{U}$, allora

$$f^{-1}(A) \supseteq \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) = g(n)\} \cap g^{-1}(A) \in \mathcal{U}$$

e quindi $f^{-1}(A) \in \mathcal{U}$ (il viceversa è analogo).
Ora, dato che g è una funzione senza punti fissi, possiamo applicare il teorema dei 3 colori. Esiste quindi una colorazione di $\mathbb{N}$

$$\mathbb{N} = C_1 \sqcup C_2 \sqcup C_3$$

tale che la famiglia $\mathcal{F} = \{\{n, f(n)\} \mid n \in \mathbb{N}\}$ non è ha elementi monocromatici. Poiché $\mathbb{N} \in \mathcal{U}$ e $\mathcal{U}$ è un ultrafiltro, esiste un i tale che $C_i \in \mathcal{U}$. Ma $\mathcal{U} = g_*(\mathcal{U})$, quindi $g^{-1}(C_i) \in \mathcal{U}$.
Ora, per come sono stati scelti i C_i, vale

$$g^{-1}(C_i) \subseteq C_i^c$$

che non è un elemento di $\mathcal{U}$, e quindi abbiamo trovato l'assurdo.

$\square$