11 maggio

Esercizio

$\mathfrak{B}^* - \mathfrak{B} \not\Rightarrow \mathfrak{B}$ ultrafiltro

Soluzione

manca.

Esercizio

$C_{\mathfrak{B}_C} = C$

Soluzione

$C_{\mathfrak{B}_C} = \{\mathcal{U} \mid \mathfrak{B}_C \subseteq \mathcal{U}\} = \{\mathcal{U} \mid \bigcap_{\mathcal{V}\in C} \mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}\}$. Quindi $C \subseteq C_{\mathfrak{B}_C}$. D'altro canto, facciamo vedere che $C_{\mathfrak{B}_C} \subseteq \overline{C} = C$. Quindi, sia $\mathcal{U} \in C_{\mathfrak{B}_C}$. Devo vedere che per ogni intorno O_A di $\mathcal{U}$ esiste $\mathcal{V} \in C$ tale che $\mathcal{V} \in O_A$. Se, per assurdo $\forall \mathcal{V} \in C$ $\mathcal{V} \notin O_A$, allora $A^c \in \mathcal{V}$ $\forall \mathcal{V} \in C$ e quindi $A^c \in \mathfrak{B}_C = \bigcap_{\mathcal{V}\in C} \mathcal{V}$. Ma allora $A^c \in \mathcal{U}$, assurdo.

Esercizio

Sia $\Delta = \{\mathcal{U} \mid \forall A \in \mathcal{U}\ BD(A) > 0\}$. $\mathcal{A} = \{\mathcal{U} \mid \forall A \in \mathcal{U}$ è AP-rich$\}$

1) Δ è ideale bilatero $(\beta\mathbb{N}, \oplus)$
2) Δ è ideale sx non destro su $(\beta\mathbb{N}, \odot)$
3) $\mathcal{A}$ è ideale bilatero su $(\beta\mathbb{N}, \oplus)$
4) $\mathcal{A}$ è ideale sx su $(\beta\mathbb{N}, \odot)$. È anche dx?
5) $\Delta' = \{\mathcal{U}$ non principale $\mid \mathcal{U} \notin \Delta\}$ è ideale sx di $(\beta\mathbb{N}, \oplus)$ e $(\beta\mathbb{N}, \odot)$
6) $a_{n+1} - a_n \to \infty$, allora $A = \{a_n\} \notin \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ per ogni $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ non principali)
7) $(\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}) \oplus (\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N})$ è nowhere dense in $\beta\mathbb{N}$.

Soluzione

1, 3 e parte del 2 sono stati risolti nello scorso foglio.

2) Δ non è ideale dx in $(\beta\mathbb{N}, \odot)$. Sia $A \le_{mfe} B \iff \forall F \subset A$ finito $\exists n_0$ t.c. $F \cdot n_0 \subseteq B$. Allora I ideale dx in $(\beta\mathbb{N}, \odot) \Rightarrow (A \in P_I$ e $A \le_{mfe} B \Rightarrow B \in P_I)$.

Ma $A = \bigcup [n^2, n^2+n)$ è tale che $BD(A) = 1$ e $B = A \cdot n! = \{n^2 \cdot n!, n^2 \cdot n! + n!, \dots, n^2 \cdot n! + n \cdot n!\}$ è tale che $BD(B) = \lim_{n\to\infty} \max_{x \in \mathbb{N}} \frac{|B \cap [x, x + n \cdot n!)|}{n \cdot n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n \cdot n!} = 0$ e $A \le_{mfe} B$ perché $F \cdot n! \subseteq B$ per ogni $F \subset A$.

4) A è chiuso perchè P_A è P.R. Allora mi basta dimostrare che $(\exists n_0 \ A \cdot n_0 \in P_I) \Rightarrow A \in P_I$ per veder che A è ideale sx in $(\beta\mathbb{N}, \odot)$. Ma questo è vero: fisso m; $\exists d, x$ tali che $x+d, \ldots, x+md \in A \cdot n_0$; allora $\frac{x}{n_0} + \frac{d}{n_0}, \ldots, \frac{x}{n_0} + m\frac{d}{n_0} \in A$.

È ideale dx in $(\beta\mathbb{N}, \odot)$? Se A è AP-rich e $A \leq_{mfe} B \Longrightarrow B$ è AP-rich?

Fisso m, esistono x, d tali che $x+d, \ldots, x+md \in A$. Ma $F = \{x+d, \ldots, x+md\}$ è un insieme finito e quindi esiste n_0 tale che

$$F \cdot n_0 = \{x \cdot n_0 + n_0 d, \ldots, x + m \cdot n_0 d\} \subseteq B$$

che è una progressione aritmetica di lunghezza m.

5) MANCA

6) Siano, per assurdo $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ tali che $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$. Questo succede se e solo se $\hat{A} = \{n \mid A - n \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$. Ma $A - n = \{m \mid \exists k \ m + n = a_k\}$.

Considero $n_1 < n_2 \in \hat{A}$ e $B = \{m \mid \exists k \ m + n_1 = a_k$ e $\exists j \ m + n_2 = a_j\} = (A - n_1) \cap (A - n_2) \in \mathcal{V}$

Ora, poiché $a_{n+1} - a_n \longrightarrow \infty$ si ha che $\exists \ell_0$ t.c. $\forall \ell > \ell_0$ $a_\ell - a_{\ell-1} > n_2 - n_1$ da cui $a_\ell - n_2 > a_{\ell-1} - n_1$ e quindi B è finito, assurdo.

6) Voglio veder che per ogni aperto di $\beta\mathbb{N}$ esiste un suo sottoinsieme aperto che non interseca $(\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}) \oplus (\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N})$. Sia $A \subseteq \mathbb{N}$. Se A è finito O_A contiene solo ultrafiltri principali ed è quindi disgiunto da $(\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}) \oplus (\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N})$. Sia dunque A infinito, $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$. Definisco $B \subseteq A$ tale che $b_{n+1} - b_n \longrightarrow \infty$ (per fare ciò ad esempio: $b_{n+1} = \min\{a_j \mid a_j > n + b_n\}$.) Allora, per 5) $B \notin (\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}) \oplus (\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N})$ e quindi $O_B \cap (\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N} \oplus \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}) = \emptyset$.