Esercizi su densità asintotiche, spessità, sindeticità (prima parte)

Guglielmo Nocera

18 maggio 2015

Definizione 1. *Data una famiglia $\mathcal{F}$ di sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{N}$, si definisce $\mathcal{F}^*$ come la famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ che intersecano tutti gli elementi di $\mathcal{F}$.*

Esercizio 1. *Se la famiglia $\mathcal{F}$ (di sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{N}$) è regolare per partizioni allora $\mathcal{F}^*$ è un filtro.*

<u>*Dim.*</u>

- Evidentemente $\varnothing \notin \mathcal{F}^*$.
- $A \subseteq B, A \in \mathcal{F}^*$ implica che A interseca tutti gli elementi di $\mathcal{F}$, e quindi anche B, dunque $B \in \mathcal{F}^*$.
- Per dimostrare la stabilità di $\mathcal{F}^*$ per intersezioni binarie utilizziamo la regolarità per partizioni di $\mathcal{F}$. Supponiamo infatti che $A, B \in \mathcal{F}^*, A \cap B \notin \mathcal{F}^*$. Dunque $\exists F \in \mathcal{F}$ t.c.

  $$A' = F \cap A \neq \varnothing$$

  $$B' = F \cap B \neq \varnothing$$

  $$A' \cap B' = F \cap A \cap B = \varnothing.$$

  Tuttavia
  $$F = A' \cup B' \cup (F \setminus (A' \cup B'))$$
  e quindi per PR almeno uno fra A', B' e $A \cap B'$ appartiene a $\mathcal{F}$. Ma se $A' \in \mathcal{F}$, poiché $B \cap A' = B' \cap A' = \varnothing$ si ottiene che $B \notin \mathcal{F}^*$, assurdo. Analogo ragionamento vale se $B' \in \mathcal{F}$; se infine $\varnothing = A' \cap B' \in \mathcal{F}$ si contraddice la definizione.

$\square$

Corollario 1. *La famiglia* Δ^* *con*

$$\Delta = \{\Delta(X) | X \subseteq \mathbb{N} \text{ } \textit{infinito}\}$$

(insiemi di distanze) è un filtro.

Definizione 2 (Densità asintotiche)**.** $A \subseteq \mathbb{N}$. *Si definiscono densità asintotica superiore, inferiore e di Banach rispettivamente:*

$$\overline{d}(A) = \limsup_{n\to\infty} \frac{|A \cap [1,n]|}{n}$$

$$\underline{d}(A) = \limsup_{n\to\infty} \frac{|A \cap [1,n]|}{n}$$

$$\underline{d}(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{|A \cap [1,n]|}{n} \text{ } \textit{(se esiste)}$$

$$BD(A) = \lim_{n\to\infty} \max_{x\in\mathbb{N}} \frac{|A \cap [x+1, x+n]|}{n}$$

La densità di Banach è ben definita perché ogni $\frac{|A\cap[x+1,x+n]|}{n}$ *è limitato da* 1 *(dunque esiste il massimo) e la successione dei massimi è subadditiva (dunque esiste il limite: Lemma di Fekete).*

Definizione 3. *Un sottoinsieme* A *di* $\mathbb{N}$ *si dice spesso se contiene intervalli arbitrariamente lunghi, e sindetico se i suoi buchi sono uniformemente limitati da un naturale* k*. Si dice sindetico a tratti se è intersezione di un sindetico e di uno spesso (ovvero se esistono intervalli arbitrariamente lunghi in cui esso ha buchi limitati da una costante uguale per tutti questi intervalli).*

Esercizio 2. $A, B \subseteq \mathbb{N}$ *disgiunti.*

$$\underline{d}(A) + \underline{d}(B) \leq \underline{d}(A \cup B) \leq \underline{d}(A) + \overline{d}(B) \leq \overline{d}(A \cup B) \leq \overline{d}(A) + \overline{d}(B)$$

__Dim.__ Siano $a_n = \frac{|A\cap[1,n]|}{n}, b_n = \frac{|B\cap[1,n]|}{n}, c_n = \frac{|(A\cup B)\cap[1,n]|}{n} = a_n + b_n$ essendo A e B disgiunti. Ricordando la superadditività del liminf e la subadditività del limsup,

$$\underline{d}(A) + \underline{d}(B) = \liminf a_n + \liminf b_n \leq \liminf(a_n + b_n) = \liminf(c_n) = \underline{d}(A \cup B)$$

$$\underline{d}(A\cup B) - \overline{d}(B) = \liminf(a_n + b_n) - \limsup(b_n) = \liminf(a_n + b_n) + \liminf(-b_n) \leq \liminf(a_n + b_n - b_n) = \underline{d}(A)$$

$$\overline{d}(A \cup B) - \underline{d}(A) = \limsup(a_n + b_n) + \limsup(-a_n) \geq \limsup(b_n) = \overline{d}(B)$$

$$\overline{d}(A \cup B) \leq \limsup(a_n) + \limsup(b_n) = \overline{d}(A) + \overline{d}(B)$$

$\square$

Esercizio 3. *Se* $A = \{a_1 < a_2 < ...\} \subset \mathbb{N}$ *è t.c.* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_n} < +\infty$ *allora* $d(A) = 0$.

<u>*Dim.*</u> Supponiamo $\overline{d}(A) > 0$. Allora, come si è dimostrato a lezione, A è sindetico, ovvero ha buchi limitati da un certo k. Ma allora $\displaystyle\sum_n \frac{1}{a_n} \geq \sum_n \frac{1}{kn} = \frac{1}{k}(+\infty)$, assurdo. Quindi $\overline{d}(A) = 0$ e di conseguenza $\underline{d}(A) = 0$. $\square$

Esercizio 4. *È vero che se* $B \subset \mathbb{N}$, $\underline{d}(B) = \alpha$ *allora* $\exists A \subset B$ *t.c.* $d(A) = \alpha$*?*

<u>*Soluzione:*</u> *(Proposta da Federico Glaudo)* È falso. Consideriamo ad esempio l'insieme

$$B = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left[2^k, \frac{3}{2}2^k\right)$$

Evidentemente la densità asintotica inferiore è maggiore o uguale di $\frac{1}{2}$. Tuttavia, se esistesse un insieme A con densità asintotica non nulla, avremmo

$$|A \cap [1, \frac{3}{2}2^k]| = |A \cap [1, 2^{k+1}]|$$

(dato che non vi sono elementi di B, e quindi di A, in $[\frac{3}{2}2^k, 2^{k+1}]$), e quindi

$$\frac{\frac{|A \cap [1, \frac{3}{2}2^k]|}{\frac{3}{2}2^k}}{\frac{|A \cap [1, 2^{k+1}k]|}{2^{k+1}}} = \frac{2^{k+1}}{\frac{3}{2}2^k} = \frac{4}{3} \neq 1.$$

Dunque la successione $\dfrac{A \cap [1, n]}{n}$, quale che sia $A \subseteq B$, ammetterebbe due sottosuccessioni non asintoticamente equivalenti e dunque A non può avere densità asintotica. Possono invece esistere sottoinsiemi (ad esempio, banalmente, $\varnothing$) con densità asintotica nulla.

Esercizio 5. *Sono equivalenti:*

(1) A *è spesso;*

(2) $\exists I \subseteq {}^*A$ *intervallo infinito* ($I = [\mu, \nu]$ *con* $\nu - \mu$ *infinito);*

(3) $\forall \nu \in {}^*\mathbb{N}$ *esiste* $I, |I| = \nu$ *incluso in* ${}^*A$.

(4) $\exists \xi \in {}^*\mathbb{N}$ *t.c.* $A_\xi = \{n \in \mathbb{N} | \xi + n \in {}^*A\}$ *è proprio* $\mathbb{N}$.

(5) A^c *non è sindetico.*

<u>*Dim.*</u>

(1) $\iff$ (2) Se per ogni k esiste un intervallo $[a_k, b_k]$ di lunghezza k contenuto in A, sia $\mu = \langle a_k \rangle$ e $\nu = \langle b_n \rangle$: $[\mu, \nu]$ è un intervallo infinito contenuto in ${}^*A$. Il viceversa è del tutto analogo.

(1) $\Longrightarrow$ (3) Basta considerare gli intervalli $[a_{x_k}, b_{x_k}]$ come definiti sopra, dove $\nu = \langle x_k \rangle$

(3) $\Longrightarrow$ (2) Immediato.

(2) $\Longrightarrow$ (4) Sia $\xi = \mu$, Se esistesse $n \notin A_\xi$, poiché I è un intervallo, dovremmo avere $|I| \leq n$, assurdo perché I è infinito.

(4) $\Longrightarrow$ (2) Sia $\mu = \xi$. Per overspill esiste $\alpha \in A_\xi$ infinito, dato che A_ξ è interno in quanto associato alla successione di insiemi $\langle A_{\geq x_n} \rangle$ dove $\xi = \langle x_n \rangle$. Quindi $[\mu, \mu + \alpha]$ è contenuto in ${}^*A$.

(1) $\Longrightarrow$ (5) Se A è spesso, il suo complementare non può avere buchi limitati, poiché tali buchi sono gli intervalli massimali di A, che per definizione non sono uniformemente limitati.

(5) $\Longrightarrow$ (1) Se A^c non è sindetico significa che ha buchi arbitrariamente lunghi, che saranno contenuti in A: dunque A è spesso.

$\square$

Esercizio 6. *Dualmente, sono equivalenti*

(1) *B sindetico;*

(2) *${}^*B$ non ha buchi infiniti, cioè per ogni I intervallo infinito vale $I \cap {}^*B \neq \varnothing$;*

(3) *$\exists k \in \mathbb{N}$ t.c. ${}^*B$ ha solo buchi di lunghezza minore o uguale a k.*

<u>*Dim.*</u>

(1) $\Longrightarrow$ (2) Se così non fosse, avremmo una successione di intervalli contenuti in B^c della forma $[a_n, b_n]$ con $b_n - a_n$ frequentemente crescente, il che è assurdo.

(2) $\Longrightarrow$ (3) La tesi segue dal principio di overspill come nell'esercizio precedente.

(3) $\Longrightarrow$ (1) Se B^c contenesse intervalli arbitrariamente lunghi avremmo una successione $b_n - a_n$ (estremi di intervalli) strettamente crescente, assurdo.

Esercizio 7.

1. *$A \subseteq \mathbb{Z}$ sindetico $\iff$ esiste F sottoinsieme finito di $\mathbb{Z}$ t.c. $A + F = \mathbb{Z}$.*
2. *A spesso $\iff$ per qualunque F sottoinsieme finito di $\mathbb{Z}$ esiste x t.c. $x + F \subseteq A$.*

<u>*Dim.*</u>

1. A ha buchi limitati da k implica che $A + [-k, k] = \mathbb{Z}$.
   Viceversa, se $A + F = \mathbb{Z}$ allora ogni intervallo di lunghezza maggiore di $\max\{|f| \mid f \in F\}$ deve intersecare A, altrimenti avremmo $A + F \not\supseteq I$.

2. Sia $k = |F|$, e sia $I \subseteq A$, $|I| \geq k$. Allora $(\min I) + F \subseteq I$.
   Viceversa, sia $I_n = [1, n]$. Poiché per ogni n esiste x t.c. $x + I_n \subseteq A$, significa che $[x+1, x+n] \subseteq A$. Quindi A è spesso.

Esercizio 8 (Caratterizzazione nonstandard dei sintetici a tratti)**.** *$A \subseteq \mathbb{N}$ è sindetico a tratti $\iff$ esiste I infinito t.c. ${}^*A \cap I$ è sindetico in ${}^*\mathbb{N}$.*

Dim.

$\Longrightarrow$ A sindetico a tratti. Dunque esiste una successione di intervalli $I_n, |I_n| = n$, t.c. $A \cap I_n$ è sindetico con costante uniforme k indipendente da n. L'insieme di ipernaturali

$$^*\langle A \cap I_n \rangle =^* A \cap^* \langle I_n \rangle =^* A \cap I$$

è sindetico, dato che la costante è uniforme e dunque la limitatezza dei buchi passa al modello nonstandard.

$\Longleftarrow$ Sia $I = [\mu, \nu]$, $\mu = \langle a_n \rangle, \nu = \langle b_n \rangle$. Allora se ${}^*A \cap I$ è sindetico con costante k, per quasi ogni n (ma ci basta a meno di prendere dei sottointervalli degli I_n) $A \cap I_n$ è sindetico con costante k.