Esercizi sulle proprietà topologiche di $\beta\mathbb{N}$

Guglielmo Nocera

17 maggio 2015

Nota. In tutto il testo si identificherà senza preavviso $\mathbb{N}$ con la sua immersione in $\beta\mathbb{N}$ costituita dagli ultrafiltri principali.

Definizione 1 (Compattificazione di Stone-Čech)**.** *Si definisce Compattificazione di Stone-Čech di uno spazio topologico X uno spazio βX t.c.:*

- *è compatto;*
- *è uno spazio T_2 (i.e. di Hausdorff);*
- *X è contenuto e denso in βX;*
- *$\forall f : \mathbb{N} \longrightarrow K$ compatto T_2*
$$\exists! \overline{f} : \beta\mathbb{N} :\longrightarrow K$$
estensione continua di f.

In altri termini, $\beta\mathbb{N}$ è l'oggetto universale nella categoria $\mathcal{C}$ costituita da

$$\textbf{\textit{Ob(C)}} = \{f : X \longrightarrow K \text{ continua} \mid K \text{ compatto di Hausdorff}\}$$

$$\textbf{\textit{Mor(C)}} = \{\phi : K_1 \longrightarrow K_2 \text{ continua} \mid f_1 : X \longrightarrow K_1, f_2 : X \longrightarrow K_2 \in \textbf{\textit{Ob(C)}},\ \phi \circ f_1 = f_2\}.$$

Nota. La compattificazione di Stone-Čech, se esiste, è unica per l'unicità dell'oggetto universale di una categoria a meno di isomorfismi (in questo caso, di omeomorfismi). Riportiamo la dimostrazione nel caso di $\beta\mathbb{N}$ poco avanti.

Esercizio 1. *Lo spazio degli ultrafiltri su $\mathbb{N}$ è in effetti la compattificazione di Stone-Čech di $\mathbb{N}$.*

Dim. Denotiamo provvisoriamente lo spazio degli ultrafiltri con H. Abbiamo dimostrato a lezione che $\beta\mathbb{N}$ è compatto e di Hausdorff e che vale la proprietà universale. Dimostriamo che $\mathbb{N}$ è denso in $\beta\mathbb{N}$. Per ogni $\mathcal{U} \in \mathbb{N}$, per ogni $\mathcal{O}_B$ intorno di $\mathcal{U}$, sia b in B. Evidentemente tutti gli elementi di ogni $\mathcal{V} \in \mathcal{O}_B$ contengono b, quindi l'ultrafiltro principale $\mathcal{U}_b$ appartiene ad $\mathcal{O}_b$. Poiché ciò vale per ogni intorno di ogni punto di H, $\mathbb{N}$ è denso in H. Per completezza dimostriamo anche l'unicità. Supponiamo che C sia un'altra compattificazione di Stone-Čech dei naturali. Per la proprietà universale di $H = \beta\mathbb{N}$ esiste un'unica applicazione continua ϕ da $\beta\mathbb{N}$ in C t.c.

$$\phi \circ i_{\beta\mathbb{N}} = i_C$$

dove $i_{\beta\mathbb{N}}$ e i_C rappresentano rispettivamente le immersioni di $\mathbb{N}$ nelle due compattificazioni. Viceversa, applicando la proprietà universale a C otteniamo che esiste $\psi : C \longrightarrow \beta\mathbb{N}$ t.c.

$$\psi \circ i_C = i_{\beta\mathbb{N}}$$

quindi

$$\psi \circ \phi \circ i_{\beta\mathbb{N}} = \psi \circ i_C = i_\beta\mathbb{N}$$

cioè $\psi \circ \phi$ è l'unica applicazione continua da $\beta\mathbb{N}$ in $\beta\mathbb{N}$ che estende l'identità su $\mathbb{N}$, ovvero l'identità stessa su $\beta\mathbb{N}$. (Analogamente $\phi \circ \psi = id_C$.) Quindi ϕ è continua con inversa continua e dunque è un omeomorfismo.

Esercizio 2. $A \subset \mathbb{N} \Longrightarrow \overline{A} = \mathcal{O}_A$

Dim. Certamente poiché $\mathcal{O}_A$ è chiuso vale $A \subseteq \mathcal{O}_A$. D'altra parte, così come $\mathbb{N}$ è denso in $\beta\mathbb{N}$, tale è A in $\mathcal{O}_A$, dato che ogni intorno $\mathcal{O}_B$ di un qualsiasi punto $\mathcal{U}$ di $\mathcal{O}_A$ si interseca con $\mathcal{O}_A$ dandoci $\mathcal{O}_{A\cap B}$, dove $A \cap B$ è non vuoto dato che come sottoinsieme di $\mathbb{N}$ appartiene ad $\mathcal{U}$. Quindi esiste $\mathcal{U}_b$ ultrafiltro principale ($b \in A \cap B$) contenuto in $\mathcal{O}_B \cap \mathcal{O}_A$. Se ne conclude che A è denso in $\mathcal{O}_A$. □

Esercizio 3. $\mathbb{N}$ *è discreto in* $\beta\mathbb{N}$.

Dim. Sia $\bigsqcup_n$ ultrafiltro principale. Allora $\bigsqcup_n = \mathcal{O}_{\{n\}}$, dato che se $A \in \bigsqcup_n$ certamente contiene $\{n\}$, e d'altra parte l'unico ultrafiltro contenente $\{n\}$ è $\bigsqcup_n$. □

Esercizio 4. *In* $\beta\mathbb{N}$*:*

(1) U *intorno di* $\mathcal{U} \Longrightarrow U \cap \mathbb{N} \subseteq U$

(2) $U \subseteq \beta\mathbb{N}$ *aperto* $\Longrightarrow \overline{U} = \mathcal{O}_{U\cap\mathbb{N}}$

(3) C *aperto e chiuso* $\Longleftrightarrow$ $C = \mathcal{O}_A$ *per un certo* $A \subseteq \mathbb{N}$

Dim.

(1) Sia $\mathcal{O}_A$ intorno di $\mathcal{U}$, e sia $\mathcal{O}_A \cap \mathbb{N}$ l'insieme degli ultrafiltri principali contenenti A. L'unione dei punti ad essi associati contiene A, dato che ogni $\bigsqcup_a$, $a \in A$, sta in $\mathcal{O}_A$. Quindi, inteso come sottoinsieme di $\mathbb{N}$, $\mathcal{O}_A \cap \mathbb{N}$ contiene A e dunque sta in $\mathcal{U}$. Ciò vale per ogni $\mathcal{O}_A$ e quindi per ogni intorno.

(2) Certamente $\mathcal{O}_{U\cap\mathbb{N}}$ è chiuso e contiene U, dato che ogni ultrafiltro $\mathcal{U}$ di U è t.c. $U \cap \mathbb{N} \in \mathcal{U}$ per il punto precedente (si può applicare perché $\mathcal{U}$ è aperto e quindi intorno di ogni suo punto). Inoltre è il più piccolo chiuso, dato che ogni chiuso contenente U deve contenere $\mathcal{O}_{U\cap\mathbb{N}}$ in quanto $\overline{U}$ contiene $\overline{U \cap \mathbb{N}} = \mathcal{O}_{U\cap\mathbb{N}}$ (questa uguaglianza segue dall'*Esercizio 2*).

(3) C aperto $\Longrightarrow \overline{C} = \mathcal{O}_{C\cap\mathbb{N}}$ per il punto precedente. Ma poiché C è anche chiuso vale $C = \mathcal{O}_{C\cap\mathbb{N}}$.

Esercizio 5. *Sia* $\{\mathcal{O}_{A_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una famiglia di intorni di un ultrafiltro non principale* $\mathcal{U}$. *Allora esiste* B *infinito t.c.* $\mathcal{O}_B \setminus \mathbb{N} \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_{A_n}$.

Dim. Sia $B \subset \mathbb{N}, B = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$ così costruito:

$$b_1 \in A_1$$

$$b_2 \in A_1 \cap A_2 \setminus \{b_1\}$$

$$b_3 \in A_1 \cap A_2 \cap A_3 \setminus \{b_1, b_2\}.$$

(Tale costruzione è possibile perché gli A_n, essendo contenuti in $\mathcal{U}$ non principale, hanno la SPIF.) Allora per ogni n $B \setminus A_n$ è finito, e dunque ogni ultrafiltro non principale contenente B contiene anche tutti gli A_n dato che non può contenere nessun $B \setminus A_n$; in conclusione

$$\mathcal{O}_B \setminus \mathbb{N} \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_{a_n}.$$

□

Nota: Osserviamo che $\mathcal{O}_B \setminus \mathbb{N}$ ha almeno due elementi, dato che per ogni partizione di B in due parti infinite C e D esistono due distinti ultrafiltri non principali contenenti rispettivamente C e D, dato che $\{C, B\}$ e $\{D, B\}$ sono due famiglie con la SPIF e dunque generano due ultrafiltri distinti e non principali.

Corollario 1. *$\beta\mathbb{N}$ non è metrizzabile.*

<u>*Dim.*</u> Infatti se lo fosse il sistema di intorni $\{B_{\frac{1}{n}}(\mathcal{U})\}_{n\in\mathbb{N}}$ avrebbe come intersezione globale $B_0(\mathcal{U}) = \{\mathcal{U}\}$, ma abbiamo mostrato che $\mathcal{O}_B \setminus \mathbb{N}$ è contenuto in in tale intersezione e ha almeno due elementi. $\square$

Lemma 2. *$\beta\mathbb{N}$ è T_4, ovvero i punti sono chiusi e ogni coppia di chiusi disgiunti ammette una coppia di aperti separanti (proprietà di normalità).*

<u>*Dim.*</u> $\{\mathcal{U}\} = \bigcap\limits_{A\in\mathcal{U}} \mathcal{O}_A$ è chiuso perché intersezione di chiusi. Inoltre, come ogni compatto di Hausdorff, è normale.[1]

Corollario 3. *$\beta\mathbb{N}$ non ha la seconda numerabilità, o sarebbe metrizzabile (essendo T_4) in virtù del Teorema di metrizzazione di Urysohn.*

Esercizio 6. *$\beta\mathbb{N}$ ha cardinalità 2^c.*

<u>*Dim.*</u> (*Riadattata da* Steen-Seebach, *Counterexamples in Topology*) Consideriamo lo spazio $I^I = [0,1]^{[0,1]}$. Esso è compatto e di Hausdorff in quanto prodotto di compatti di Hausdorff, ed è separabile in quanto prodotto di al più $2^{\aleph_0}$ spazi separabili[2]. Sia D il denso numerabile e sia $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow I^I$ una bisezioni di $\mathbb{N}$ con D. Per la proprietà universale ϕ si estende ad una applicazione continua $\overline{\phi} : \beta\mathbb{N} \longrightarrow I^I$, la cui immagine sarà compatta, quindi chiusa (I^I è di Hausdorff), e conterrà D: quindi $\overline{\phi}$ è surgettiva e

$$|\beta\mathbb{N}| \geq |I^I| = 2^c.$$

[1] <u>*Dim.*</u> Infatti siano F_1, F_2 chiusi disgiunti, e sia $y \in F_2$: allora, essendo X di Hausdorff, per ogni $x \in F_1$ esistono intorni disgiunti $U_x(y)$ di y e $U_y(x)$ di x: per compattezza di F_1 (è un chiuso in un compatto), dal ricoprimento $\{U_y(x)\}_{x\in F_1}$ se ne pu‘o estrarre uno finito $\{U_y(x_1), ..., U_y(x_n)\}$. Poniamo

$$A_y = U_y(x_1) \cup \cdots \cup U_y(x_n) \supset F_1$$

$$W_y = U_{x_1}(y) \cup \cdots \cup U_{x_n}(y).$$

Per definizione W_y è un intorno di y e per compattezza di F_2 dal ricoprimento $\{W_y\}_{y\in F_2}$ possiamo estrarne uno finito $\{W_{y_1}, \ldots, W_{y_m}\}$. Poniamo allora

$$A1 = A_{y_1} \cap \cdots \cap A_{y_m}$$

$$A2 = W_{y_1} \cap \cdots \cap W_{y_m}.$$

A_1 e A_2 sono ovviamente aperti disgiunti, tali che $F_1 \subset A_1$ e $F_2 \subset A_2$.

[2] Dugundji, p.175.

Poiché inoltre lo spazio degli ultrafiltri è un sottoinsieme di $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ abbiamo anche l'altra disuguaglianza.

Definizione 2. *$\mathcal{U}$ ultrafiltro non principale si dice $P-point$ di $\beta\mathbb{N}$ se ogni intersezione numerabile di suoi intorno è ancora un intorno di $\mathcal{U}$ in $\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$ (ovvero si può scrivere come $U\setminus\mathbb{N}$ dove U è un intorno di $\mathcal{U}$ e $\mathbb{N}$ identifica gli ultrafiltri principali).*

Esercizio 7. *Sono equivalenti:*

(1) *$\mathcal{U}$ P-point.*

(2) *Per ogni $\mathbb{N}=\bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i$ con $A_i\notin\mathcal{U}$ $\forall i$, esiste $X\in\mathcal{U}$ t.c ogni $X\cap A_i$ è finito.*

(3) *Ogni funzione $f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ è costante o oppure a fibre finite, una volta ristretta ad un opportuno $A\in\mathcal{U}$.*

(4) *Se $\varepsilon\in{}^*\mathbb{R}=\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\big/\mathcal{U}$ è un infinitesimo positivo, allora esiste $f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{R}$ infinitesima t.c. $[f]_{\mathcal{U}}=\varepsilon$.*

<u>Dim.</u>

(1) $\Longleftrightarrow$ (2) Certamente $\mathcal{U}\in\mathcal{O}_{A_i^c}$ per ogni i. Facendo l'intersezione su $i\in\mathbb{N}$ otteniamo un intorno U di $\mathcal{U}$ in $\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$. Esiste dunque $\mathcal{O}_B$ t.c. $\mathcal{U}\in(\mathcal{O}_B\setminus\mathbb{N})\subset\bigcap_i\mathcal{O}_{A_i^c}$. B è tale che tutti gli ultrafiltri non principali cui appartiene contengono anche tutti gli A_i^c, e quindi deve intersecare ogni A_i in una quantità finita di punti. Supponiamo infatti che $B\cap A_i$ sia infinito per un qualche i. Poiché la famiglia (B,A_i) ha la SFIP, può essere estesa ad un filtro che estende Fréchet, dato che ogni parte cofinita di $\mathbb{N}$ ha intersezione infinita con ogni insieme infinito; e questo filtro può quindi essere esteso ad un ultrafiltro non principale. Tale ultrafiltro non principale conterrebbe A_i, assurdo.
Viceversa, se $\mathcal{U}\in\bigcap_n\mathcal{O}_{A_n}$, allora esiste $B\in\mathcal{U}$ t.c. l'intersezione di B con ciascun A_n^c è finita. Allora ogni non principale contenente B contiene ciascun A_i, dato che altrimenti conterrebbe un insieme finito $B\cap A_i^c$. Quindi $\mathcal{U}\in\mathcal{O}_B\setminus\mathbb{N}\subset\bigcap_n A_n$.

(2) $\Longleftrightarrow$ (3) Sia $f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$. Consideriamo

$$\mathbb{N}=\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} f^{-1}(i).$$

Se esiste i t.c. $f^{-1}(i)\in\mathcal{U}$ allora $f|_{f^{-1}(i)}$ è costante, altrimenti esiste l'elemento X che interseca le fibre in un numero finito di punti e quindi $f|_X$ ha fibre finite.

Viceversa, sia

$$\mathbb{N} = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} A_i, A_i \notin \mathcal{U} \ \forall i.$$

Allora la funzione

$$f = \sum_{i \in \mathbb{N}} i \ \chi_{A_i}$$

è ben definita per disgiunzione degli A_i (tutti i termini sono nulli tranne uno), e deve esistere $X \in \mathcal{U}$ t.c. $f|_X$ è costante (impossibile dato che in tal caso avremmo $X \subseteq A_i$ per un qualche i e quindi $A_i \in \mathcal{U}$) oppure a fibre finite, e quindi $|A \cap A_i|$ è finita $\forall i$.

$(3+2) \Longrightarrow (4)$ Se f non è costante q.o. (cioè non è nulla q.o., caso che darebbe immediatamente la tesi) sappiamo che esiste $A \in \mathcal{U}$ t.c. f ha fibre finite su A. Per ogni $r \in Im\ f, r > 0$, sia $n_r = \min(f^{-1}(k))$, e sia $\Lambda_r = \{m \geq n_k, m \in A | f(m) \geq k\}$. Per ipotesi di infinitesimo nessun Λ_k sta nell'ultrafiltro. Inoltre i Λ_k ricoprono $\mathbb{N}$ eventualmente uniti a $f^{-1}(0)$. Per (2) esiste $B \in \mathcal{U}$ t.c. $|B \cap \Lambda(k)|$ è finito $\forall k$ (e possiamo supporre $B \subset A$). Allora, se $B = \{x_1 < x_2 < \dots\}$, per ogni x_k in B vale $f(x_{k+h}) < f(x_k)$ per ogni h al di fuori di un insieme finito, perché altrimenti $B \cap \Lambda(k)$ sarebbe infinito; quindi per ogni k $f(x)$ è definitivamente (in B) minore di $f(x_n)$, e quindi $f|_B$ è infinitesima, e può dunque essere completata costante a tratti ad una funzione infinitesima su tutto $\mathbb{N}$.

$(4) \Longrightarrow (3)$ Sia $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ non costante q.o. Allora l'iperreale $\langle \frac{1}{f(n)} | n \in \mathbb{N} \rangle$ è infinitesimo, quindi equivalente ad una successione infinitesima $s(n)$, ovvero t.c. $\limsup s_n = 0$, quindi per ogni n la successione assume definitivamente valori strettamente inferiori a $s(n)$ (a meno di restringersi ad un insieme B dell'ultrafiltro), e in particolare le fibre degli elementi di $s(B)$ sono finite. Segue che anche quelle di $f|_B$ lo sono.

$\square$

Riferimenti bibliografici

[1] J. Dugundji, *Topology*, WCB 1989

[2] L. Steen, A. Seebach, *Counterexamples in Topology*, Dover 1995