Esercizi sulle proprietà algebriche di $\beta\mathbb{N}$ (prima parte)

Guglielmo Nocera

17 maggio 2015

Definizione 1 (Somma tra ultrafiltri)**.** $A \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V} \iff \Lambda(A) = \{n | A - n \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$

Esercizio 1. *La somma di due ultrafiltri è ancora un ultrafiltro.*

<u>*Dim.*</u>

- $\varnothing \notin \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$
- $A, B \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$. Allora $\{n | A \cap B - n \in \mathcal{V}\} \supseteq \{n | A - n \in \mathcal{V}\} \cap \{n | B - n \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$.
- $B \supset A \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$. Allora $\{n | B - n \in \mathcal{V}\} \supseteq \{n | A - n \in \mathcal{V}\}$ dato che $A - n \in \mathcal{V} \Longrightarrow B - n \in \mathcal{V}$. Quindi $\{n | B - n \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$.
- $A \notin \mathcal{U} \oplus \mathcal{V} \Longrightarrow \{n | A - n \in \mathcal{V}\} \notin \mathcal{U} \Longrightarrow \{n | A - n \notin \mathcal{V}\} \in \mathcal{U} \Longrightarrow \{n | (A - n)^c = A^c - n \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$.

□

Esercizio 2. *La somma* $S : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *induce*

$$S_* : \beta\mathbb{N} \times \beta\mathbb{N} \longrightarrow \beta\mathbb{N}$$

$$\mathcal{U} \otimes \mathcal{V} \mapsto \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$$

nel senso che

$$S_*(\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}) := \{S(A) | A \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}\}$$

coincide con $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$.

<u>*Dim.*</u> $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V} = \{A \subset \mathbb{N} | \{i | A - i \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}\} = \{A \subset \mathbb{N} | A - i \in \mathcal{V}$ '$\mathcal{U}-$quasi ovunque'$\}$ mentre

$$S_*(\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}) = \{\{a + b | (a, b) \in A\} | A \text{ t.c. } A_i \in \mathcal{V} \text{ '}\mathcal{U}-\text{quasi ovunque'}\} =$$

$= \{C \subset \mathbb{N}$ insieme di somme$|C-b \in \mathcal{V}$ per '$\mathcal{U}-$quasi' ogni b ($C-b$ corrisponderebbe ad A_b)$\} =$

$$= \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}.$$

$\square$

Esercizio 3. *L'applicazione* $\psi_{\mathcal{V}} : \mathcal{U} \mapsto \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ *è continua.*

<u>*Dim.*</u> Sia $\mathcal{O}_A$ aperto in $\beta\mathbb{N}$. Vogliamo mostrare che $\psi_{\mathcal{V}}^{-1}(\mathcal{O}_A)$ contiene un intorno di ogni suo punto. Sia dunque $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V} \ni A$. Sarà

$$\Lambda(A) = \{n|A - n \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}.$$

Ciò per ogni $\mathcal{U} \in \psi_{\mathcal{V}}^{-1}(\mathcal{U} \oplus \mathcal{V})$. Allora $\Lambda(A)$ è t.c. $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_\Lambda$ $\forall \mathcal{U} \in \psi_{\mathcal{V}}^{-1}(\mathcal{U} \oplus \mathcal{V})$, quindi $\mathcal{O}_\Lambda$ è intorno di ogni punto della fibra di $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$. Inoltre $\mathcal{O}_\Lambda \subseteq \psi_{\mathcal{V}}^{-1}(\mathcal{O}_A)$, dato che $\forall \mathcal{W} \in \mathcal{O}_\Lambda$ vale $\{n|A - n \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{W}$ e quindi $A \in \mathcal{W} \oplus \mathcal{V}$, ovvero $\psi_{\mathcal{V}}(\mathcal{W}) \in \mathcal{O}_A$. $\square$

Definizione 2. $A \in \mathcal{U} \odot \mathcal{V} \iff \{n|A/n \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$ *dove* $A/n = \{m|mn \in A\}$.

Esercizio 4. $k > 1$. *Allora*

$$k^{\mathcal{U} \odot \mathcal{V}} = k^{\mathcal{U}} \odot k^{\mathcal{V}}$$

dove $k^{\mathcal{U}} = \exp_k(\mathcal{U})$.

<u>*Dim.*</u>

$$A \in k^{\mathcal{U} \odot \mathcal{V}} \iff \{n|A/k^n \in k^{\mathcal{V}}\} \in \mathcal{U} \iff \{k^n|A/k^n \in k^{\mathcal{V}}\} \in k^{\mathcal{U}} \iff A \in k^{\mathcal{U}} \odot k^{\mathcal{V}}.$$

$\square$

Esercizio 5. (1) $\mathcal{U}$ *idempotente* $\Longrightarrow k\mathbb{N} \in \mathcal{U}$ $\forall k$.

(2) $\exists \mathcal{W}$ *t.c.* $\mathcal{W} \oplus \mathcal{U} = \mathcal{U} \iff \forall A \in \mathcal{U}\ \exists n\ A - n \in \mathcal{U}$.

(3) $\mathcal{U} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{U} \iff \forall\ A \in \mathcal{U}\ \exists a \in A\ A - a \in \mathcal{U}$.

(4) $\bigsqcup_\alpha = \{A \subseteq \mathbb{N}|\alpha \in {}^*A\}$ *è idempotente* $\iff$ *Se* $\alpha \in {}^*A$ *anche* $\alpha + a \in {}^*A$ *per un opportuno* $a \in A$.

<u>*Dim.*</u>

(1) $k\mathbb{N} \notin \mathcal{U} \Longrightarrow kn \notin \mathcal{U} \oplus \mathcal{U} \Longrightarrow \Lambda(k\mathbb{N}) = \{n|k\mathbb{N} - n \in \mathcal{U}\} \notin \mathcal{U} \Longrightarrow \{n|k\mathbb{N} - n \notin \mathcal{U}\} \in \mathcal{U}$, ma se $n \notin k\mathbb{N}$ abbiamo $k\mathbb{N} - n \cap k\mathbb{N} = \varnothing$ quindi $\{n \notin k\mathbb{N}\} \subset \Lambda(k\mathbb{N})$ da cui $\Lambda(k\mathbb{N}) \in \mathcal{U}$ perché $\{n \notin k\mathbb{N}\} \in \mathcal{U}$ per ipotesi. Assurdo.

(2)($\Longrightarrow$) $A \in \mathcal{U} \Longrightarrow A \in \mathcal{W} \oplus \mathcal{U} \Longrightarrow \Lambda(A) \in \mathcal{U} \Longrightarrow \exists n \ A - n \in \mathcal{U}$

($\Longleftarrow$) Vogliamo dimostrare che esiste $\mathcal{W}$ tale che $\forall A \in \mathcal{U} \Lambda(A) \in \mathcal{W}$. Mostriamo che gli insiemi $\Lambda(A)$ hanno la PIF: $A, B \in \mathcal{U}, A \cap B = C \in \mathcal{U}, \exists n C - n \in \mathcal{U} \Longrightarrow A - n \in \mathcal{U}, B - n \in \mathcal{U} \Longrightarrow n \in \Lambda(A) \cap \Lambda(B)$. Quindi esiste un ultrafiltro $\mathcal{W}$ che estende la famiglia $\{\Lambda(A)\}_{A \in \mathcal{U}}$.

(3)($\Longrightarrow$) $\mathcal{U} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{U} \Longrightarrow \forall A \in' uu \exists a \in AA - a \in \mathcal{U} \Longrightarrow \forall A \in \mathcal{U} \ \Lambda(A) \in \mathcal{U}$ quindi $\Lambda(A) \cap A \neq \varnothing$ e dunque contiene un certo $n \in A$.

($\Longrightarrow$) Sia $\mathcal{W} = \mathcal{U} \cup \{\Lambda(A)\}_{A \in \mathcal{U}}$. Se genera un filtro questo sarà uguale ad $\mathcal{U}$, dato che $\mathcal{U}$ è già massimale. Del resto la famiglia ha la PIF, perché, presi $A, B \in \mathcal{U}$, si ha $\Lambda(A) \supseteq \Lambda(A \cap B)$ (infatti $n \in \Lambda(A \cap B) \Longrightarrow A - n \supseteq A \cap B - n \in \mathcal{U}$) e quindi $\Lambda(A \cap B) \cap B \neq \varnothing$; mentre prendendo $\Lambda(A), \Lambda(B)$ entrambi contengono $\Lambda(A \cap B) \neq \varnothing$.
Quindi l'ultrafiltro generato esiste ed è $\mathcal{U}$, cosicché

$$\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U} \oplus \mathcal{U} \Longrightarrow \mathcal{U} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}$$

trattandosi di un contenimento fra ultrafiltri.

(4)($\Longrightarrow$) $\bigsqcup_\alpha = \bigsqcup_\alpha \oplus \bigsqcup_\alpha \Longrightarrow \forall A \in \bigsqcup_\alpha \ \Lambda(A) = \{n | A - n \in \bigsqcup_\alpha\} \in \bigsqcup_\alpha$ ovvero $\{n | \alpha \in {}^*A - n\} \in \bigsqcup_\alpha$ ma poiché $A \in \bigsqcup_\alpha$ vale $\Lambda(A) \cap A \neq \varnothing$ quindi $\exists a \in A$ t.c. $\alpha \in {}^*A - a$ ovvero $\alpha + a \in {}^*A$.

($\Longleftarrow$) $\forall A \in \bigsqcup_\alpha \ \exists a \in A$ t.c. ${}^*A - a \in \bigsqcup_\alpha$ quindi si applica (3).

□

Definizione 3. *$\mathcal{F}$ filtro si dice additivo se per ogni ultrafiltro $\mathcal{V}$ che lo estende vale $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F} \oplus \mathcal{V}$.*

Esercizio 6. *Il filtro di Fréchet è additivo.*

Dim. $A \in \mathcal{F} \oplus \mathcal{V} \iff \Lambda_{\mathcal{V}}(A) = \{n | A - n \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{F}$. Ma se A è cofinito, $A - n = \mathbb{N}$ per cofiniti $\mathbb{N}$. □

Esercizio 7. *Il filtro generato da $\{k\mathbb{N} | k \in \mathbb{N}\}$ è additivo.*

Dim. Sia $\mathcal{F}$ il filtro in questione, $\mathcal{V}$ ultrafiltro che lo estende. Certamente se $A \in \mathcal{F}$ A contiene un $k\mathbb{N}$, dato che intersezione di due $k_i\mathbb{N}$ è ancora un $h\mathbb{N}$, quindi $A - k\mathbb{N} \in \mathcal{V}$ perché $A - k\mathbb{N} \supset k\mathbb{N}$. Allora $\Lambda_{\mathcal{V}}(A) \supset k\mathbb{N}$ e quindi $\Lambda_{\mathcal{V}}(A) \in \mathcal{F}$. □